**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

И.о. проректора по учебной работе

_____Ф.Д.Кодзоева

« 30 »_____06_____2022г.

.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

## Б1.О.12 Функциональный анализ

**Направление подготовки**

**01.03.01 –МАТЕМАТИКА**

Квалификация выпускника

**БАКАЛАВР**

Форма обучения

**Очная**

Магас, 2022г

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются:

- изучение структуры множества суммируемых функций;

- построение теории интеграла Лебега и изучение его свойств;

- изучение метрических и топологических пространств;

- изучение банаховых пространств;

- применение результатов функционального анализа к исследованию интегральных уравнений;

- выявление существующей связи между собой ряда теорем классического математического анализа, отобразив их на основные принципы функционального анализа;

- изучение основ теории обобщенных функций.

**Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников**

| Наименование документа | Код | Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности |
|---|---|---|
| ОКЗ | 2320 | Преподаватели в средней школе |
| | 2340 | Преподаватели в системе специального образования |

| **Код и наименование профессионального стандарта** | **Обобщенные трудовые функции** | | | **Трудовые функции** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Код** | **Наименование** | **Уровень квалификации** | **Наименование** | **Код** | **Уровень (подуровень) квалификации** |
| 01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель) | А | Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования | 6 | Общепедагогическая функция. Обучение | А/01.6 | 6 |
| | | | | Воспитательная деятельность | А/02.6 | 6 |
| | | | | Развивающая деятельность | А/03.6 | 6 |
| | В | Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ | 6 | Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования | В/03.6 | 6 |

**Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата**

Дисциплина является одной из основных дисциплин базовой (общепрофессиональной) части профессионального цикла учебного плана подготовки бакалавра по направлению 01.03.01. «Математика». Дисциплина «Функциональный анализ» является логическим продолжением курса математического анализа и действительного анализа. Для ее изучения необходимы базовые знания курсов математического анализа, аналитической геометрии и алгебры. Данная дисциплина является предшествующей для изучения следующих дисциплин: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Основания геометрии»

**3. Результаты освоения дисциплины (модуля) <u>функциональный ализ</u>**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

| Код компетен-ции | Наименование компетенции | Индикатор достижения компетенции | В результате освоения дисциплины обучающийся **должен**: |
|---|---|---|---|
| *УК-1* | УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК 1.1: Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие;<br>УК 1.2: Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи;<br>УК 1.3: Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов<br>УК1.4: При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формулирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения.<br>УК 1.5.: Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки | **Знать:**<br>цели и задачи научных исследований по направлению деятельности, базовые принципы и методы их организации; основные источники научной информации и требования к представлению информационных материалов; способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирования задач различных групп; формулировки известных утверждений, следствий из них;<br>**Уметь:**<br>составлять общий план работы по заданной теме, предлагать методы исследования и способы обработки результатов, проводить исследования по согласованному с руководителем плану, представлять полученные результаты; выбирать наиболее |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике; пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа; |
| *ОПК-1* | Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | Знает: Методы исследования, применяемые в математическом анализе, комплексном и функциональном анализе, алгебре, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логик, теории вероятностей, математической статистике и случайных процессах, численных методах, теоретической механике.<br>Умеет: Публично доказывать и объяснять фундаментальные результаты, соответствующих разделам математики<br>Владеет: Навыками строгого доказательства утверждений в области математического анализа комплексного и функционального анализа, алгебры , аналитической геометрии , дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики случайных процессов, численных методов, теоретической механики | **Владеть:** систематическими знаниями по направлению деятельности; углубленными знаниями по выбранной направленности подготовки, базовыми навыками проведения научно-исследовательских работ по предложенной теме; возможности современных научных методов на уровне, необходимом для постановки и решения задач, имеющих естественно-научное содержание; методики доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода. |
| *ПК-3* | Способен определить общие формы и закономерности отдельной предметной области | Знает особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики.<br><br>Умеет системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы.<br><br>Владеет современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры данной дисциплины. | |

**4. Структура и содержание дисциплины (модуля) «Функциональный анализ»**

**4.1. Структура дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 13 зачетных единиц, 468 часов.

| **Вид учебной работы** | **Всего** | **Порядковый номер семестра** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **5** | **6** | **7** | |
| Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе: | 13 з.е. | 3,5 | 5,5 | 4 | |
| Курсовой проект (работа) | не предусмотрено | | | | |
| Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе: | 196 | 68 | 72 | 56 | |
| Лекции | 102 | 36 | 36 | 30 | |
| Практические занятия, семинары | 94 | 32 | 36 | 26 | |
| Лабораторные работы | | | | | |
| Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе: | 245 | 58 | 126 | 61 | |
| КСР | | | | | |
| Экзамен | 27 | | | 27 | |
| Общая трудоемкость дисциплины | 468 | 128 | 198 | 144 | |

| №/№ | Наименование разделов и тем дисциплины (модуля) | семестр | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | | | | | | | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Формы промежут. аттест | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Аудиторная работа | | | | | Самостоятельная работа | | | | | | | | | | |
| | | | всего | лекции | Практ. занятия | Лаборат. занятия | Др.виды контак. | Всего | Курсов. | Подготовка к экз. | Другие виды | Собеседование | Колоквиум | Проверка тестов | Проверка | Проверка реферата | Проверка эсе и | Курсовая работа |
| | | 567 | 468 | 102 | 94 | | | | | | 272 | | | | | | | |
| | **Семестр 5** | | 126 | 36 | 32 | | | | | | 58 | | | | | | | |
| | **Раздел 1** | | | 4 | 3 | | | | | | 22 | | | | | | | |
| 1.1 | Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики. | | | 2 | 1 | | | | | | 11 | | | | | | | |
| 1.2 | Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики. | | | 2 | 2 | | | | | | 11 | | | | | | | |
| 2 | **Раздел 2** | | | 16 | 16 | | | | | | 18 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.1. | Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств. Счетные множества и множества мощности континуум. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 2.2. | Метрические пространства. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| **2.3.** | Открытые и замкнутые множества. | | | **2** | 2 | | | | | | **2** | | | | | | | |
| 2.4 | Компактные множества в метрических пространствах | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 2.5 | Критерий Хаусдорфа | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 2.6 | Полнота и пополнение | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 2.7 | Теорема о стягивающихся шарах. Принцип сжимающих отображений | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 2.8. | Топологические пространства | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| | **Раздел 3** | | | 16 | 13 | | | | | | 18 | | | | | | | |
| 3.1. | Мера и интеграл Лебега: Построение меры Лебега на прямой. | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.2. | Общее понятие аддитивной меры. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.3. | Лебеговское продолжение меры | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.4 | Измеримые функции и их свойства. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.5 | Определение интеграла Лебега | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.6 | Класс суммируемых функций | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.7 | Предельный переход под знаком интеграла. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 3.8 | Интеграл Стилтьеса. Теорема Радона-Никодима. | | | 2 | 2 | | | | | | 4 | | | | | | | |
| | **Семестр 6** | | 198 | 36 | 36 | | | | | | 126 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Раздел 4** | | | 26 | 26 | | | | | | 86 | | | | | | | |
| 4.1 | Прямое произведение мер и теорема Фубини. | | | 2 | 2 | | | | | | 13 | | | | | | | |
| 4.2 | Пространства L1, Lp (p>1) | | | 2 | 2 | | | | | | 7 | | | | | | | |
| 4.3 | Неравенства Гельдера и Минковского | | | 2 | 2 | | | | | | 11 | | | | | | | |
| 4.4 | Определение линейного нормированного пространства. | | | 2 | 2 | | | | | | 19 | | | | | | | |
| 4.5 | Банаховы пространства | | | 2 | 2 | | | | | | 12 | | | | | | | |
| 4.6 | Сопряженное пространство, его полнота | | | 2 | 2 | | | | | | 8 | | | | | | | |
| 4.7 | Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. | | | 2 | 2 | | | | | | 5 | | | | | | | |
| 4.8 | Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. | | | 2 | 2 | | | | | | 1 | | | | | | | |
| 4.9 | Линейные операторы, норма оператора. | | | 2 | 2 | | | | | | 1 | | | | | | | |
| 4.10 | Сопряженный оператор, обратный оператор, спектр и резольвента. | | | 2 | 2 | | | | | | 1 | | | | | | | |
| 4.11 | Теорема Банаха об обратном операторе | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 4.12 | Компактные операторы. Компактность интегральных операторов. | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 4.13 | Понятие об индексе. Теорема | | | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Фредгольма. Примеры использования теоремы Фредгольма. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | **Раздел 5** | | | 10 | 10 | | | | | | 40 | | | | | | | |
| 5.1 | Гильбертовы пространства: Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. | | | 3 | 3 | | | | | | 12 | | | | | | | |
| 5.2 | Ортогональные системы. Неравенство Бесселя | | | 3 | 3 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 5.3 | Базисы и гильбертова размерность | | | 2 | 2 | | | | | | 11 | | | | | | | |
| 5.4 | Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение. | | | 2 | 2 | | | | | | 9 | | | | | | | |
| | **Семестр 7** | | 144 | 30 | 26 | | | | | | 61 | | 27 | | | | | |
| | **Раздел 5** | | | 6 | 7 | | | | | | 30 | | | | | | | |
| 5.5. | Общий вид линейного функционала. | | | 2 | 2 | | | | | | 5 | | | | | | | |
| 5.6 | Самосопряженные и унитарные операторы. Ортопроекторы.<br>Теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. | | | 1 | 2 | | | | | | 8 | | | | | | | |
| 5.8 | Функциональное исчисление. Приведение оператора к виду умножения на функцию. | | | 2 | 2 | | | | | | 12 | | | | | | | |
| 5.9 | Спектральная теорема. Неограниченные самосопряженные операторы. Примеры. | | | 1 | 1 | | | | | | 5 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Раздел 6** | | | 14 | 9 | | | | | | 15 | | | | | | | |
| 6.1 | Линейные топологические пространства и обобщенные функции: Полинормированные пространства. | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.2 | Функционал Минковского | | | 3 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.3 | Нормируемость и метризуемость. Топологии в сопряженном пространстве. | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.4 | Слабая компактность в сопряженном пространстве. | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.5 | Основные пространства гладких функций | | | 1 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.6 | Пространства обобщенных функций. | | | 2 | 1 | | | | | | 2 | | | | | | | |
| 6.7 | Операции над обобщенными функциями. Преобразование Фурье. | | | 2 | 3 | | | | | | 3 | | | | | | | |
| | **Раздел 7** | | | 10 | 10 | | | | | | 15 | | | | | | | |
| 7.1 | Элементы линейного анализа. Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала. Экстремум функционала. | | | 3 | 3 | | | | | | 5 | | | | | | | |
| 7.2 | Классические задачи вариационного исчисления. Уравнения Эйлера | | | 4 | 4 | | | | | | 5 | | | | | | | |
| 7.3 | Вторая вариация. Условия Лежандра и Якоби. | | | 3 | 3 | | | | | | 5 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | Экзамен в 7 семестре | | | | | | |

**4.2. Содержание дисциплины (модуля)**

**Семестр 5**

**Раздел 1. История и этапы развития функционального анализа**

Тема 1.1.: Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.
Тема 1.2.: Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.

**Раздел 2. Метрические и топологические пространства**

Тема 2.1.: Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств. Счетные множества и множества мощности континуум.
Тема 2.2.: Метрические пространства.
Тема 2.3.: Открытые и замкнутые множества.
Тема 2.4.: Компактные множества в метрических пространствах.
Тема 2.5.; Критерий Хаусдорфа.
Тема 2.6.: Полнота и пополнение.
Тема 2.7.; Теорема о стягивающихся шарах. Принцип сжимающих отображений. Тема 2.8.; Топологические пространства.

**Раздел 3. Мера и интеграл Лебега**

Тема 3.1: Мера и интеграл Лебега: Построение меры Лебега на прямой.
Тема 3.2.: Общее понятие аддитивной меры.
Тема 3.3.: Лебеговское продолжение меры.
Тема 3.4.: Измеримые функции и их свойства.
Тема 3.5.: Определение интеграла Лебега.
Тема 3.6.: Класс суммируемых функций
Тема 3.7.; Предельный переход под знаком интеграла. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
Тема 3.8.; Интеграл Стилтьеса. Теорема Радона-Никодима.

**Семестр 6**

**Раздел 4 Банаховы пространства**

Тема 4.1.: Прямое произведение мер и теорема Фубини.
Тема 4.2.: Пространства L1, Lp (p>1)
Тема 4.3.: Неравенства Гельдера и Минковского
Тема 4.4.: Определение линейного нормированного пространства.
Тема 4.5.: Банаховы пространства.
Тема 4.6.: Сопряженное пространство, его полнота
Тема 4.7.: Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала.
Тема 4.8.: Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.
Тема 4.9.: Линейные операторы, норма оператора.
Тема 4.10.: Сопряженный оператор, обратный оператор, спектр и резольвента.
Тема 4.11.: Теорема Банаха об обратном операторе
Тема 4.12.: Компактные операторы. Компактность интегральных операторов.
Тема 4.13.: Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. Примеры использования теоремы Фредгольма.

**Раздел 5. Гильбертовы пространства**

Тема 5.1.: Гильбертовы пространства: Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
Тема 5.2.: Ортогональные системы. Неравенство Бесселя.
Тема 5.3.: Базисы и гильбертова размерность.
Тема 5.4.: Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение.

**Семестр 7**

**Раздел 5 Функционал**

Тема 5.5.: Общий вид линейного функционала.
Тема 5.6.: Самосопряженные и унитарные операторы. Ортопроекторы.
Тема 5.7.: Теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах.
Тема 5.8.: Функциональное исчисление. Приведение оператора к виду умножения на функцию.

Тема 5.9.: Спектральная теорема. Неограниченные самосопряженные операторы. Примеры.

**Раздел 6. Линейные и топологические пространства**

Тема 6.1.: Линейные топологические пространства и обобщенные функции: Полинормированные пространства.

Тема 6.2.: Функционал Минковского.

Тема 6.3.: Нормируемость и метризуемость. Топологии в сопряженном пространстве.

Тема 6.4.: Слабая компактность в сопряженном пространстве.

Тема 6.5.: Основные пространства гладких функций.

Тема 6.3.: Пространства обобщенных функций.

Тема 6.4.: Операции над обобщенными функциями. Преобразование Фурье.

**Раздел 7. Вариационное исчисление**

Тема 7.1.: Элементы линейного анализа. Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала. Экстремум функционала.

Тема 7.2.: Классические задачи вариационного исчисления. Уравнения Эйлера Тема 7.3.: Вторая вариация. Условия Лежандра и Якоби.

**Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)**

Не предусмотрены учебным планом ООП

**Примерная тематика курсовых работ**

Не предусмотрены учебным планом ООП

**5.Образовательные технологии**

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

**6.1. План самостоятельной работы студентов**

| **№ п/п** | **Наименование темы** | **Вид самостоятельной работы** |
|---|---|---|
| **Семестр-5**<br>1.1-1.3 | Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств. Счетные множества и множества мощности континуум. Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа. | Контрольная работа № 1 |
| 2.1-2.3 | Открытые и замкнутые множества. | Исследовательская домашняя работа №1 |
| 1.3-2.2 | Открытые и замкнутые множества. Компактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа. Полнота и пополнение. Теорема о стягивающихся шарах. Принцип сжимающих отображений. Топологические пространства. | Контрольная работа №2 |
| 2.1-2.4 | Компактные множества в метрических пространствах. | Исследовательская домашняя работа №2 |
| **Семестр-6**<br>3.1-3.4 | Мера и интеграл Лебега. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Интеграл Стилтьеса. | Контрольная работа № 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Неравенства Гельдера и Минковского. | |
| 3.3-3.5 | Мера и интеграл Лебега. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Интеграл Стилтьеса. Неравенства Гельдера и Минковского. | Теоретический тест №1 |
| 4.1-4.4 | Банаховы пространства | Контрольная работа № 2 |
| **Семестр-7**<br><br>**5.1-5.4** | Линейные топологические пространства и обобщенные функции. Функционал Минковского. Операции над обобщенными функциями. Преобразование Фурье. | Контрольная работа № 1 |
| 5.1-5.4 | Топологии в сопряженном пространстве. Слабая компактность в сопряженном пространстве. Основные пространства гладких функций. | Исследовательская домашняя работа №1 |
| 6.1-7.3 | Экстремум функционала. Классические задачи вариационного исчисления. | Контрольная работа №2 |

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета**

| Оценка | Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета |
|---|---|
| «Зачтено» | Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки. |
| «Не зачтено» | Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство |

| | |
|---|---|
| | предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму. |

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена**

| Оценка | Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена |
|---|---|
| «Отлично» | Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму. |
| «Хорошо» | Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму. |
| «Удовлетворительно» | Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки. |
| «Неудовлетворительно» | Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму. |

**6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов**

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1.самоконтроль и самооценка обучающегося;

2.контроль и оценка со стороны преподавателя.

**Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы**

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

**Организация и руководство внеаудиторной работы**

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;
- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных зада; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

### 6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

### Контрольная работа по теме «Евклидовы пространства»

1.Записать неравенство Коши-Буняковского в различных конкретных евклидовых пространствах:
a) в евклидовых пространствах $V_2$и $V_3$;
b)в евклидовом арифметическом пространстве $R^n$;
c) в евклидовом пространстве $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.
2.Вычислить скалярное произведение и нормы функций $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 + x$ в$C[0,1]$
3.Найти угол между $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$и $g(x) = x^{\frac{3}{4}}$ в$C[0,1]$.
4. Доказать, что в $R^2$ скалярное произведение можно определить следующим образом: $(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$.

### Контрольная работа по теме «Гильбертовы пространства»

1.Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \to l_2$ ,

если: $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots), \lambda_n \in R, |\lambda_n| \leq 1$.

2. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \to l_2$ ,

если: $Ax = (x_2, x_3, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

3. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \to l_2$ ,

если: $Ax = (x_1, x_2, \dots, 0, 0, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

4. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \to l_2$ ,

если: $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

### Контрольная работа по теме «Банаховы пространства »

1.Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

2.Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств.

3. Показать, что$C[a,b]$ сепарабельное банаховое пространство.

4.Доказать,что $l_p^n(R), l_p(R), p \neq \infty$ сепарабельное банаховое пространство.

### Тестовые задания

**Вариант 1.**

**1. Множества $A$ и $B$ называется равномощными, если:**

а) существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : A \to B$

б) существует отображение $\psi : A \to B$

в) если $A \subset B$ и $B \subset A$

**2. Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность:**

а) счетную,

б) с,

в) $2^c$.

**3. Пространство $C([a,b])$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ является:**

а) полным

б) неполным

в) сепарабельным

**4. Компактное подмножество $A$ хаусдорфова пространства:**

а) хаусдорфово,

б) замкнуто,

в) открыто.

**5. Исключите свойство, не имеющее отношения к понятию меры на алгебре множеств:**

а) $\mu(\phi) = 0$ и $\mu(A) \geq 0$

б) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),\ A_n \cap A_m = \phi$ при $n \neq m$

в) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых $A,\ B$ принадлежащих заданной алгебре множеств.

**Вариант 2**

**1. Мощность множества понимается как количество элементов множества, если:**

а) множество конечно,

б) множество счетно,

в) множество пусто

**2. Какое из данных множеств не обладает мощностью гиперконтинуума:**

а) множество всех функций, заданных на $[a,b]$,

б) множество $|R^n$,

в) множество всех подмножеств плоскости?

**3. Пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функцией с метрикой $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ является:**

а) неполным

б) полным

в) сепарабельным

**4. Внутренность множества $A$ обозначается:**

а) $O(A)$,

б) $\operatorname{int} A$

в) $X \setminus A$

**5. Мера Лебега канторовского множества равна:**

1) 1

2) 0

3) не определена.

**Вариант 3.**

**1. Известно, что $A \subset B$, тогда**

а) $|A| < |B|$

б) $|A| \neq |B|$

в) $|A| = |B|$

г) нет верного ответа.

**2. Какое из приведенных свойств не является аксиомой метрики**:

1) $\rho(x,x)=0$

2) $\rho(x,y)=-\int(y,x)$

3) $\rho(x,y)\leq\int(y,x)=\int(x,z)$?

**3. Какое из приведенных пространств не является полным**:

а) $C([a,b])$ с метрикой $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$

б) пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$

в) $C([a,b])$ с метрикой $\rho(f,g)=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx$ ?

**4. Множество** $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ **на** $R$ **со стандартной топологией**

а) открыто,

б) не открыто,

в) замкнуто,

г) не замкнуто.

**5. Алгебра всегда является:**

а) кольцом,

б) полукольцом,

в) $\sigma$ - алгеброй.

**Вариант 4.**

**1. Если** $A\subset B\subset C$ **и** $|A|=|C|$**, то**

а) $|A|=|B|$

б) $|A|=|B|=|C|$

в) $|A|\neq|B|$

**2. Какое из приведенных ниже пространств не является метрическим**:

а) $C[0,1]$,

б) $R$,

в) $L_p$

г) нет верного ответа?

**3. Функция** $f(x)$ **абсолютно интегрируема на** $[a,b]$ **и** $\int\limits_a^b |f(x)|dx=o$ **(1) и** $f(x)=0$ **в любой точке** $x\in[a,b]$ **(2), тогда**:

а) $(1)\Rightarrow(2)$

б) $(2)\Rightarrow(1)$

в) $(1)\Rightarrow(2)$

**4. Пусть $Q$ - множество рациональных точек на $R$, тогда**:

а) $Q$ - компактно,

б) $Q$ - не компактно,

в) $R \setminus Q$ - компактно.

**5. Пространство** $L_p(a.в), 1 \le p < \infty$

а) сепарабельно,

б) неполное

в)содержит только непрерывные функции

**Вопросы к экзамену.**

**Шестой учебный семестр**

1.Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств.

2. Счетные множества и множества мощности континуум.

3. Метрические пространства

4. Открытые и замкнутые множества

5.Компактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.

6. Полнота и пополнение. Теорема о стягивающихся шарах.

7. Принцип сжимающих отображений.

8.Топологические пространства.

9.Евклидовые пространства; определение нормированных пространств, примеры.

10. Неравенство Коши-Буняковского. Примеры.
11. Определение нормированного комплексного пространства.
12. Определение счетно-аддитивной и внешней меры.
13. Определение измеримой функции.
14. Понятия сходимости для измеримых функций..
15. Меры и измеримые множества. $\sigma$ -алгебра борелевских множеств.
16. Измеримые функции и интеграл Лебега.
17. Определение интегрируемой по мере $\mu$ функций.
18. Примеры мер $\mu_\alpha$ и отвечающие им интегралы.

**Седьмой учебный семестр**

1. Евклидовые пространства; определение нормированных пространств, примеры.
2. Ортогональные системы.

3. Неравенство Бесселя.
4. Неравенство Коши-Буняковского. Примеры.
5. Определение нормированного комплексного пространства.
6. $\sigma$-кольцо множеств.
7. Определение счетно-аддитивной и внешней меры.
8. Определение измеримой функции.
9. Понятия сходимости для измеримых функций.
10. Линейное отображение и теорема об ограниченном линейном отображении.
11. Меры и измеримые множества. $\sigma$ -алгебра борелевских множеств.
12. Измеримые функции и интеграл Лебега.
13. Определение интегрируемой по мере $\mu$ функций.
14. Теорема Леви о монотонной сходимости.
15. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
16. Теорема Фату о сходимости последовательности интегрируемых неотрицательных функций.
17. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
18. Примеры мер $\mu_\alpha$ и отвечающие им интегралы.
19. Мера Дирака, канторово множество, канторово лестница.
20. Определения и теоремы борелевской меры $\mu$.
21. Теорема Лебега о разложении.
22. Определение сингулярной меры.
23. Теорема Радона-Никодима, Лебега.
24. Теорема Фубини.
25. Теорема о произведении мер.
26. Определение и примеры гильбертовых пространств.
27. Определение прямой суммы.
28. Ортогональная проекция.
29. Теорема об ортогональной проекции.
30. Определение сопряженного пространства.
31. Теорема Рисса.

***Контроль освоения компетенций***

| № п\п | Вид контроля | Контролируемые разделы | Компетенции, компоненты которых контролируются |
|---|---|---|---|
| 1 | Аудиторная контр.работа(проверка и оценка) | Раздел 1-Раздел 2 в 5 м семестре<br>Раздел 3- Раздел 4 во 6м семестре<br>Раздел 5- Раздел 6 в 7м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |
| 2 | Тестирование. Подготовка к | Раздел 1-Раздел 2 в 5 м семестре<br>Раздел 3- Раздел 4 во 6м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | тестированию(оценка результатов) | Раздел 5- Раздел 6 в 7м семестре | |
| 3 | Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная) | Раздел 1-Раздел 2 в 5 м семестре<br>Раздел 3- Раздел 4 во 6м семестре<br>Раздел 5- Раздел 6 в 7м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |
| 4 | Зачет в 1 семестре | Раздел 1-Раздел 2 в 5 м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |
| 5 | Экзамен в шестом семестре | Раздел 1- Раздел 4 во 6м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |
| 6 | Экзамен в седьмом семестре | Раздел 5- Раздел 6 в 7м семестре | УК-1, ОПК-1, ПК-3 |

**7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) элементарная математика**

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) дискретная математика.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющихся в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

**7.1. Учебная литература:**

**Основная литература:**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.:Наука, 1989, - 623 с.

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука,1979.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука,1979.

3. Антоневич А.Б., Радыно Я.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Изд-во «Университетское», 1984, - 352 с.

**Дополнительная литература:**

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984, - 752 с.

2. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975, - 443 с.

3. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 1995. – 224 с.

4. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966;

5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; Иосида К., Функциональный анализ, пер, с англ., М., 1967;

6. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1-3, М., 1962-74; Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ. Теория и приложения пер с англ., М., 1969.

7. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболев Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2005.

8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979, 1988.

**7.2. Интернет-ресурсы**

1. Федеральный портал http//edu.ru
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ http//elib.dgu.ru

**7.3. Программное обеспечение**:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

**7.4. Материально-техническое обеспечение**

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала (специализированное демонстрационное оборудование):

1.Доска и мел (или более современные аналогии)

2. компьютерные и мультимедийные технологии

3.микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов)

Рабочая программа дисциплины **Функциональный анализ** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 « Математика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018г №8, с учетом рекомендаций ОПОП направления 01.03.01 Математика, профессионального стандарта 01.001 Образование, утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013г №544н.

Программу составил:

Доцент кафедры «Математический анализ», к.ф.-м.н. Кодзоева Ф.Дж.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ»

Протокол №9 от «24» мая 2022г

Программа одобрена Учебно-методическим советом Физико-математического факультета

протокол № 10 от «22» июня 2022 г.

Программа рассмотрена на заседании Учебно-методического совета университета

протокол № 10 от «29» июня 2022 г.

**Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений**

| Учебный год | Решение кафедры (№ протокола, дата) | Внесенные изменения | Подпись зав. кафедрой |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |