МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:
И.о. проректора по учебной работе
Ф.Д. Кодзоева
«_30_»_ _июня__ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

_______Б1.О.04.05 Интегральные уравнения и вариационное исчисление _____
(*индекс дисциплины по учебному плану, наименование дисциплины (модуля))*

Направление подготовки – ____**03.03.02 Физика**_______
(код, наименование)

Направленность: **Физика**

Квалификация выпускника – **Бакалавр**

Форма обучения ____**Очная**______

г. Магас, 2022

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины в области обучения, воспитания и развития, соответствующими целям ООП, являются:

- изучение базовых понятий интегральных уравнений и вариационного исчисления; освоение основных приемов решения практических задач по темам дисциплины;
- подготовка к поиску и анализу профильной научно-технической информации, необходимой для решения конкретных научно-исследовательских и прикладных задач, в том числе при выполнении междисциплинарных проектов;
- формирование социально-личностных качеств студентов: целеустремленности, организованности, трудолюбия, коммуникативности, готовности к деятельности в профессиональной среде, ответственности за принятие профессиональных решений.

2. МЕСТО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина Б1.Б.4.5 является одной из основных дисциплин базовой (общепрофессиональной) части профессионального цикла учебного плана подготовки бакалавра по данному направлению. Данная дисциплина является предшествующей для изучения следующих дисциплин: «Линейные и нелинейные уравнения физики».

Таблица 2.1.

Связь дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» с предшествующими дисциплинами и сроки их изучения

Код дисциплины	Дисциплины, предшествующие дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»	Семестр
Б1.Б.4.1	Математический анализ	1,2,3

Таблица 2.2.

Связь дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» с последующими дисциплинами и сроки их изучения

Код дисциплины	Дисциплины, следующие за дисциплиной «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»	Семестр
Б1.В.ОД.13	Линейные и нелинейные уравнения физики	7

Таблица 2.3.

Связь дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» со смежными дисциплинами

Код дисциплины	Дисциплины, смежные с дисциплиной «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»	Семестр
Б1.Б.4.6.	Теория вероятностей и математическая статистика	5

3.КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ. ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ И КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПО ЗАВЕРШЕНИИ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих общекультурных, общепрофессиональных и общекультурных компетенций:

ОК-7: способность к самоорганизации и самообразованию

ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: способы совершенствования и развития своего интеллектуального, культурного, нравственного, физического и профессионального уровня; современное значение информационных технологий в физике и физическом образовании; принципы научной организации труда (ОК-7), основы математического анализа, теории функций комплексной переменной, аналитической геометрии, векторного и тензорного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, вариационного исчисления, теории вероятностей и математической статистики(ОПК-2)

Уметь: выделять недостатки своего общекультурного уровня развития; ставить цели и задачи для выполнения конкретных работ, проявлять настойчивость в достижении поставленных цели и задач; ориентироваться в развитии общества, определять перспективные направления своих научных исследований (ОК-7)

Владеть: навыками совершенствования и развития своего потенциала; навыками получения и работы с информационным потоком в печатной и электронной форме; навыками выполнения научно-исследовательской работы (ОК-7), навыками использования математического аппарата для решения физических задач (ОПК-2).

Таблица 3.1

Матрица связи компетенций, формируемых на основе изучения дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление», с временными этапами освоения ее содержания

Коды компетенций (ФГОС)	Компетенция	иестр и неделя изучения
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию	5
ОПК-2	способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	5

Таблица 3.2

Планируемые результаты обучения по уровням сформированности компетенций

Коды компетенций (ФГОС)	Уровень сформированности компетенции	Планируемые результаты обучения
ОК-7	Высокий уровень	**Знать:** принципы научной организации труда. **Уметь:** ориентироваться в развитии общества, определять перспективные направления своих научных исследований. **Владеть:** навыками совершенствования и развития своего потенциала
	Базовый уровень	**Знать:** способы совершенствования и развития своего интеллектуального, культурного, нравственного, физического и профессионального уровня. **Уметь:** выделять недостатки своего общекультурного уровня развития **Владеть:** навыками получения и работы с информационным потоком в печатной и электронной формах; навыками выполнения научно-исследовательской работы.
	Минимальный уровень	**Знать:** современное значение информационных технологий в физике и физическом образовании **Уметь:** ставить цели и задачи для выполнения конкретных работ, проявлять настойчивость в достижении поставленных цели и задач. **Владеть:** навыками аргументировано оценивать закономерности исторического и экономического развития
Коды компетенций (ФГОС)	**Компетенция**	**Семестр и неделя изучения**
ОПК-2	Высокий уровень	**Знать:** основы математического анализа, теории функций комплексной переменной, аналитической геометрии, векторного и тензорного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, вариационного исчисления, теории вероятностей и математической статистики. **Уметь:** использовать математический аппарат для освоения теоретических основ и практического использования физических методов. **Владеть:** навыками использования математического аппарата для решения физических задач.
	Базовый уровень	**Знать:** современные способы использования информационно-коммуникационных технологий в выбранной сфере деятельности **Уметь:** использовать математический аппарат для освоения теоретических основ и практического использования физических методов. **Владеть:** навыками использования математического аппарата
	Минимальный уровень	**Знать:** основы математического анализа,

		интегральных уравнений, вариационного исчисления. **Уметь:** выбирать экспериментальные и расчетно-теоретические методы исследования **Владеть** навыками поиска и критического анализа информации по тематике проводимых исследований.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид учебной работы	Всего часов	5 семестр
Общая трудоемкость дисциплины	**144**	**144**
Аудиторные занятия	**50**	**50**
Лекции	**34**	**34**
Практические занятия (ПЗ)	**16**	**16**
Контроль самостоятельной работы (КСР)	**2**	**2**
Самостоятельная работа	**92**	**92**
Вид итогового контроля		Дифф.зачет

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ, СТРУКТУРИРОВАННОЕ ПО ТЕМАМ (РАЗДЕЛАМ) С УКАЗАНИЕМ ОТВЕДЕННОГО НА НИХ КОЛИЧЕСТВА АКАДЕМИЧЕСКИХ ИЛИ АСТРОНОМИЧЕКИХ ЧАСОВ И ВИДОВ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ

Раздел 1.
«Интегральные уравнения»

1. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента.
2. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство C[a,b].Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в C[a,b]. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств.
Теорема Банаха (построение последовательных приближений, доказательство существования и единственности решения уравнения Ax=x).
3. Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента; нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.
4. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма.
5. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.
6. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения. Примеры.
7. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля.
8. Преобразование Фурье, его свойства. Примеры.
9. Решение интегрального уравнения типа свертки.

Раздел 2.
«Вариационное исчисление»

10.Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных. Определение относительного экстремума функционала. Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов вида:
$\int_a^b f(x, y, y')dx, \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx, \int_a^b F(x, y, z, y', z')dx.$

11. Уравнения Эйлера и Остроградского. Классические задачи вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.

Таблица 5.2.

Распределение учебных часов по темам и видам учебных занятий (общая трудоемкость учебной дисциплины — 13 зачетных единиц)

Семестр 5

№	Тема лекции, основное содержание	Лекции	Прак. занятия	Лаб. работы
1.	Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента.	**3**	**2**	**0**
2.	Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство C [a, b].Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в C [a, b]. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств. Теорема Банаха	**4**	**0**	**0**
3.	Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента; нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.	**3**	**2**	**0**
4.	Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма	**3**	**2**	**0**
5.	Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма	**3**	**2**	**0**
6.	Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения.	**3**	**2**	**0**
7.	Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля.	**3**	**0**	**0**
8.	Преобразование Фурье, его свойства. Решение интегрального уравнения типа свертки.	**3**	**2**	**0**
9.	Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных. Определение относительного экстремума функционала. Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов вида:$\int_a^b f(x, y, y')dx,$ $\int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx, \int_a^b F(x, y, z, y', z')dx.$	**3**	**2**	**0**

10	Уравнения Эйлера и Остроградского. Классические задачи вариационного исчисления : задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.	**3**	**2**	**0**
	итого	**34**	**16**	**0**

Самостоятельная работа студента, в том числе: - в аудитории под контролем преподавателя - курсовое проектирование (выполнение курсовой работы) - внеаудиторная работа	**50** **2** **0** **92**	Формы текущего и рубежного контроля подготовленности обучающегося: Контрольные работы, тесты.
Дифф. зачет		
Всего часов на освоение учебного материала	**144**	

5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

5.1. Учебно-методическое обеспечение. Успешное освоение курса требует напряженной самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя чтение лекций и рекомендованной литературы, решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях, разбор проблемных ситуаций. Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Для активизации самостоятельной работы студентов и экономии времени, отводимого на лекционный курс, ряд тем выносится на самостоятельное изучение. Самостоятельная работа со студентами проводится в часы самостоятельной работы в форме консультаций. Распределение часов руководства самостоятельной работой учитывает важность рассматриваемой темы и возможную сложность при освоении ее студентами. Самостоятельная работа студентов рассматривается как вид учебного труда, позволяющий целенаправленно формировать и развивать самостоятельность студента как личностное качество при выполнении различных видов заданий и проработке дополнительного учебного материала. Для успешного выполнения расчетных заданий, написания рефератов и подготовки к коллоквиуму, помимо материалов лекционных и практических занятий, необходимо использовать основную и дополнительную литературу, указанную в конце данной рабочей программы. Для самостоятельной работы студентам подготовлены следующие разделы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления.

1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков. Уравнение Эйлера-Пуассона.
2. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.
3. Условный экстремум. Изопериметрическая задача.
4. Условный экстремум. Задача Лагранжа. Голономные и неголономные связи.
5. Понятия об управляемых объектах.
6. Допустимые управления.
7. Принцип максимума (Понтрягина).

Во время лекционных и практических занятий самостоятельная работа реализуется в виде решения студентами индивидуальных заданий, изучения части теоретического материала, предусмотренного учебным планом ООП. Во внеаудиторное время студент изучает рекомендованную литературу, готовится к лекционным и практическим занятиям, собеседованиям, устным опросам, коллоквиуму и контрольным работам. При подготовке можно опираться на конспект лекций и литературу, предложенную в разделе 9 данной рабочей программы. В указанном разделе расположен список основной и дополнительной литературы, а также необходимые Интернет-ресурсы. Подготовка теоретического сообщения на практическое занятие выполняется студентом самостоятельно, но по согласованию с преподавателем темы сообщения. Это может быть, например, сообщение о жизни и деятельности великих ученых-математиков, теоремы, которых изучаются в данном курсе, или интересные замечания, факты по теме лекции (практического занятия).

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.

Рубежный и суммарный рейтинг по дисциплине

Рейтинг первого контроля	Контр. работа № 1	Лекции	Практические занятия	Посещаемость занятий
Количество баллов (20-35)	16	7	7	5
Рейтинг второго контроля	Контр. работа № 1	Лекции	Практические занятия	Посещаемость занятий
Количество баллов (21-35)	16	7	7	5

Итоговая оценка по дисциплине

оценка	отлично	хорошо	удовлетворительно	не удовлетворительно
рейтинг	91-100	81-90	61-80	0-60

Таблица 6.1

Шкала и критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка (баллы)	Уровень сформированности компетенций	Общие требования к результатам аттестации в форме зачета	Планируемые результаты обучения
«Зачтено» (61-100)	Высокий уровень	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки	**Знать** все методы дифференцирования и интегрирования **Уметь** решать задачи математического анализа. **Владеть** всеми методами и способами доказательств математического анализа
	Базовый уровень	Теоретическое содержание курса освоено в целом без	**Знать** основные методы

		пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.	дифференцирования и интегрирования **Уметь** решать практические задачи математического анализа. **Владеть** основными методами и способами доказательств математического анализа
	Минимальный уровень	Теоретическое содержание курса освоено Знать уровень большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.	**Знать** необходимый минимум методов дифференцирования и интегрирования Уметь решать стандартные задачи математического анализа **Владеть** способами доказательств основных фактов
«Не зачтено» (менее 61)	компетенции, закреплённые за дисциплиной, не сформированы	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.	Планируемы результаты обучения не достигнуты

Таблица 6.2

Соответствие форм оценочных средств темам дисциплины

№ п/п	**тема**	Форма оценочного средства
1-3	Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство C[a, b].Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в C [a, b]. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств. Теорема Банаха (построение последовательных приближений, доказательство существования и единственности решения уравнения Ax=x. Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента; нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.	Тест по теоретическому материалу (0-7 баллов)
1-3	Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство C[a, b].Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в C [a, b]. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств. Теорема Банаха (построение последовательных приближений, доказательство существования и единственности решения уравнения Ax=x. Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента; нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
4-6	Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения.	Тест по теоретическому материалу (0-7 баллов)
4-6	Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
7-9	Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля. Преобразование Фурье,	Тест по теоретическом

	его свойства. Примеры. Решение интегрального уравнения типа свертки.	у материалу (0-7 баллов)
7-9	Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля. Преобразование Фурье, его свойства. Примеры. Решение интегрального уравнения типа свертки.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
10-11	Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных. Определение относительного экстремума функционала.	Тест по теоретическом у материалу (0-7 баллов)
10-11	Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных. Определение относительного экстремума функционала.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
12-13	Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов $\int_a^b f(x,y,y')dx, \int_a^b F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})dx, \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$	Тест по теоретическом у материалу (0-7 баллов)
12-13	Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов $\int_a^b f(x,y,y')dx, \int_a^b F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})dx, \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
14-15	Уравнения Эйлера и Остроградского. Классические задачи вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.	Тест по теоретическом у материалу (0-7 баллов)
14-15	Уравнения Эйлера и Остроградского. Классические задачи вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
16-17	Достаточные условия экстремума. Упрощенное достаточное условие сильного экстремума. Достаточные условия экстремума слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций.	Тест по теоретическом у материалу (0-7 баллов)
16-17	Достаточные условия экстремума. Упрощенное достаточное условие сильного экстремума. Достаточные условия экстремума слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций.	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)

Задания для индивидуальной работы в аудитории

Интегральные уравнения

1. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение $u(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+y^2} u(y)dy.$

2. Решить интегральное уравнение $u(x) = \lambda \int_0^\pi \cos^2(x-y)u(y)dy + 1 + \cos 4x.$

3. Найти итерированное ядро $K_2(x,y)$ для уравнения Фредгольма с $K(x,y) = \exp(|x|+y)$ и $a=-1,\ b=1$.

4. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda\int_0^{\pi}[\sin x\sin 4y + \sin 2x\sin 3y + \sin 3x\sin 2y + \sin 4x\sin y]u(y)dy.$$

5. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$u(x) = \cos x + \int_0^x u(y)dy.$$

6. Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2,\ldots,n$.

$$u(x) - 4\int_0^1 \sin^2(xy^2)u(y)dy = 2x - \pi.$$

Вариационное исчисление

1. Найти норму элемента $y(x)$ в пространстве $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$ соответственно

$$y(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}, \quad n = 1,2,10,100, \quad x \in [0,\pi].$$

2. Для функционала $V[y(x)] = \int_0^1 xy^2y'dx$ положить $y(x) = x^2$, $\delta y(x) = x - 2$ и сравнить δV с ΔV.
3. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$V[y(x)] = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

4. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2}dx, \; y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

5. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

6. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xydx = 0.$$

8. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4]dx,$ проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

9. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2}(y')^2]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

10. Найти методом Ритца приближенное решение задачи об эстремуме функционала:

1. $V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$

<u>Образцы контрольных заданий</u>

Контрольная работа по теме «Вариационное исчисление»

ВАРИАНТ № 1

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y\sin x]dx.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)]=\int\limits_0^1((y')^2+x^2)dx$ при условии

$$\int\limits_0^1 y^2dx=2\,,\;\; y(0)=0\,,\;\; y(1)=0\,.$$

5. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала.

$$v[y(x)]=\int\limits_0^1(x^3(y'')^2+100xy^2-20xy)dx\,,\quad y(1)=y'(1)=0\,.$$

ВАРИАНТ № 2

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)]=\int\limits_0^1(xy+y^2-2y^2y')dx\,,\quad y(0)=1\,,\quad y(1)=2\ .$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}[(y''')^2+y^2-2yx^3]dx\,.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x,y,z)]=\iiint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right]dxdydz\,.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)]=\int\limits_{x_1}^{x_2}(y')^2dx$ при условии

$\int\limits_{x_1}^{x_2}ydx=a$, где а – постоянная.

5. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)]=\int\limits_0^1((y')^2-y^2-2xy)dx\,,\quad y(0)=y(1)=0\,.$$

Вопросы к зачету

1. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений.

2. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента.

3. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений.

4. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство C [a, b].Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в C [a, b].

5. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств.

6. Теорема Банаха (построение последовательных приближений, доказательство фундаментальности этой последовательности, доказательство существования и единственности решения уравнения Ax=x.

7. Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента.

8. Нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.

9. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма.

10. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.

11. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения. Примеры.

12. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля.

13. Преобразование Фурье, его свойства. Примеры.

14. Решение интегрального уравнения типа свертки.

15. Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных.

16. Определение относительного экстремума функционала. Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов вида: $\int_a^b f(x,y,y')dx, \int_a^b F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})dx, \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$

17. Уравнения Эйлера и Остроградского.

18. Классические задачи вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.

19. Достаточные условия экстремума.

20.Упрощенное достаточное условие сильного экстремума.

21.Достаточные условия экстремума слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1.Основная литература

1. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. – М: Изд. МГУ, 1989.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: УРСС, 1998.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики: Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. - Томск: Изд-во НТЛ, 2002.
4. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. – М.: Гостехиздат, 1950.
5. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. – М.: Гостехиздат, 1941.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 1961.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975.
9. П.И. Лизоркин. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. . М.: ГИФМЛ, 1981
10. С.Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1989
11. И.Г. Петровский. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1985
12. В. И. Юдович. Лекции об уравнениях математической физики (часть вторая) Ростов-на-Дону. Изд-во РГУ, 2006.

7.2.Дополнительная литература

1. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М: Наука, 1973.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 2003.
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Интегральные уравнения. – М: Наука, 1968.
4. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. – М: Изд-во МАИ, 2000.

7.3. Программное обеспечение и Интернет - ресурсы:

http://www.lib.mexmat.ru - Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета

http://www.mathnet.ru/ - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. **http://www.benran.ru/** - Библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

http://www.edu.ru/ - Федеральный портал «Российское образование»;

http://www.mathnet.ru/ - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России;

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитории, аудиторные доски для мела, компьютерные классы, оборудованные для проведения практических занятий, библиотека и читальный зал, подключенные к сети Интернет.

Рабочая программа дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.02 Физика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от « 07 » августа 2020 г. № 920.

Программу составил: проф. кафедры «Математический анализ» М. Д. Султыгов

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ»
Протокол № 10 от «20» июня 2022 года

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой Нальгиевой М. А.

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета
Протокол № 10 от «22» июня 2022 года

Программа рассмотрена на заседании Учебно-методического совета университета
Протокол № 10 от « 29 » июня 2022 г.

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой