

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА «Математический анализ»**

**СОГЛАСОВАНА**

Руководитель образовательной программы  
факультета

\_\_\_\_\_/проф. И.А.Танкиев

от «27» февраля 2025г.

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан физико-математического

\_\_\_\_\_/Б.С. Кульбужев

от «14» марта 2025г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.28 «Математическая логика»**

Направление подготовки

**44.03.01. Педагогическое образование**

Направленность (профиль подготовки)

**Математика**

Квалификация выпускника

**БАКАЛАВР**

Форма обучения

**Очная**

Магас, 2025г

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины математическая логика является: обучить студентов построению формальных логических моделей и применению этих моделей в математике и приложениях, привить студентам навыки решения логических задач математическими методами, заложить понимание формальных основ логики и выработать у студентов достаточный уровень логической интуиции, необходимой для формализации содержательных логических задач.

### Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

№ п/п	Код профессионального стандарта	Наименование области профессиональной деятельности. Наименование профессионального стандарта
		01 Образование и наука
1.	01.001	Профессиональный стандарт «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н(зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 6 декабря 2013 г., регистрационный №30550), с изменением, внесенным приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 5 августа 2016г.№422н (зарегистрирован Министерством юстиции РФ 23 августа 2016г., регистрационный № 43326 )
2.	01.003	Профессиональный стандарт «Педагог дополнительного образования детей и взрослых», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 5 мая 2018г. № 298н (зарегистрирован Министерством юстиции РФ 28 августа 2018г., регистрационный № 52016)
3.	01.004	Профессиональный стандарт "Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования", утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 8 сентября 2015 г. № 608н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 24 сентября 2015 г., регистрационный № 38993)

### Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина относится к блоку 1: «Дисциплины(модули)». К обязательной части. Читается в 7 семестре. Находится под индексом Б1.О.32.

## 2. Результаты освоения дисциплины (модуля) Математическая логика

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
ОПК-5	Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении	<p>ОПК-5.1. Осуществляет контроль формирования результатов образования обучающихся; применяет различные методы и средства профессиональной деятельности при проведении мониторинговых исследований</p> <p>ОПК-5.2. Оценивает результаты образования обучающихся; выявляет трудности в обучении</p> <p>ОПК-5.3. Корректирует возникшие трудности в обучении; осуществляет взаимодействие по разработке и реализации программы преодоления трудностей в обучении</p>
ПК-4	Способен осуществлять обучение учебному предмету на основе использования предметных методик	<p>ПК.-4.1. Анализирует методы и средства обучения учебному предмету, особенности частных методик обучения «математике» и «информатике»</p> <p>ПК.-4.2. Проектирует рабочую программу по учебному предмету, формулирует дидактические цели и задачи обучения учебному предмету и реализовывает их в образовательном процессе</p> <p>ПК.-4.3. Планирует, моделирует и реализовывает различные организационные формы в процессе обучения учебному предмету; обосновывать выбор методов обучения учебному предмету, применять их в образовательной практике</p>

#### 4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра			
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	2 з.е.	7			
Курсовой проект (работа)	не предусмотрено				
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	60	60			
Лекции	30	30			
Практические занятия, семинары	30	30			
Лабораторные работы					
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	12	12			
КСР					
Экзамен					
Общая трудоемкость дисциплины					

[illegible]

	форма.																	
1.9	Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тождественная истинность выводимых формул.			2	4													
1.10	Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.			2	4													
	<b>Раздел 2. Вычислимые функции.</b>			<b>12</b>	<b>20</b>			<b>6</b>										
2.1	Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.			2	4													
2.2	Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.			2	4													
2.3	Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.			2	4													
2.4	Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.			4	4													
2.5	Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.			2	4													
	<b>Раздел 3. Рекурсивные функции.</b>			<b>4</b>	<b>4</b>			<b>2</b>										
3.1	Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.			4	4													
Общая трудоемкость, в часах		2		30	30			12				Промежуточная аттестация						
												Форма						
												Зачет						+
												Зачет с оценкой						-
												Экзамен						

## 4.2. Содержание дисциплины (модуля)

### Раздел 1. Логические исчисления. Модели.

Тема 1.1. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.

Тема 1.2. Тождественная истинность выводимых формул.

Тема 1.3. Непротиворечивость исчисления высказываний.

Тема 1.4. Предикаты. Логический операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл.

Тема 1.5. Кванторы. Геометрический смысл квантора существования.

Тема 1.6. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные.

Тема 1.7. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы.

Тема 1.8. Эквивалентные формулы логики предикатов. Правила преобразования формул в эквивалентные. Нормальная форма.

Тема 1.9. Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тожественная истинность выводимых формул.

Тема 1.10. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.

## **Раздел 2. Вычислимые функции.**

Тема 2.1. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.

Тема 2.2. Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.

Тема 2.3. Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.

Тема 2.4. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.

Тема 2.5. Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.

## **Раздел 3. Рекурсивные функции.**

Тема 3.1. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.

### **Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)**

Не предусмотрены учебным планом ООП

### **Примерная тематика курсовых работ**

Не предусмотрены учебным планом ООП

## 5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### 6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
<b>Раздел 1</b>	<b>Логические исчисления. Модели.</b>		<b>10</b>
<b>1.1</b>	Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.	Аудиторная работа	
<b>1.2</b>	Тождественная истинность выводимых формул.	Аудиторная работа	
<b>1.3</b>	Непротиворечивость исчисления высказываний.	Теоретический тест	
<b>1.4</b>	Предикаты. Логический операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл.	Аудиторная работа	
<b>1.5</b>	Кванторы. Геометрический смысл квантора существования.	Аудиторная работа	
<b>1.6</b>	Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные.	Аудиторная работа	
<b>1.7</b>	Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы.	Аудиторная работа	
<b>1.8</b>	Эквивалентные формулы логики предикатов. Правила преобразования формул в эквивалентные. Нормальная форма.	Аудиторная работа	
<b>1.9</b>	Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тождественная истинность выводимых формул.	Аудиторная работа	
<b>1.10</b>	Непротиворечивость исчисления предикатов.	Контрольная работа	

	Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.		
<b>Раздел 2</b>	<b>Вычислимые функции.</b>		<b>6</b>
<b>2.1</b>	Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.	<b>Аудиторная работа</b>	
<b>2.2</b>	Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.	<b>Аудиторная работа</b>	
<b>2.3</b>	Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.	<b>Аудиторная работа</b>	
<b>2.4</b>	Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.	<b>Аудиторная работа</b>	
<b>2.5</b>	Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.	<b>Контрольная работа</b>	
<b>Раздел 3</b>	<b>Рекурсивные функции.</b>	<b>Аудиторная работа</b>	<b>2</b>
<b>3.1</b>	Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.	<b>Аудиторная работа</b>	

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

#### **Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета**

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.



«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
--------------	--

### Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

## 6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

### **Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы**

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

### **Организация и руководство внеаудиторной работы**

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со

словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

### **6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов**

#### **Варианты контрольных работ.**

#### **Контрольная работа № 1**

#### **1. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы, совершенные**

#### **конъюнктивные нормальные формы**

Построить таблицы истинности для следующих формул алгебры высказываний и привести эти формулы к СДНФ и СКНФ двумя способами (по таблице истинности и с помощью законов алгебры высказываний (как в примерах 10,11 на стр. 9)).

1.  $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
2.  $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
3.  $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
4.  $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
5.  $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
6.  $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$

7.  $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
8.  $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
9.  $(x \vee y \rightarrow z) \leftrightarrow (\neg z \rightarrow \neg(x \wedge y))$
10.  $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
11.  $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
12.  $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
13.  $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
14.  $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
15.  $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$
16.  $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
17.  $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
18.  $\neg(\neg(x \vee z \rightarrow y) \vee (y \wedge \neg z \rightarrow x \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
19.  $\neg((z \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
20.  $(z \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))$

## 2. Логическое следствие в алгебре высказываний

Проверить истинность соотношений тремя способами (используя определение логического следствия и пп. 3,4 теоремы 2.  $\vdash$

1.  $x \rightarrow (y \rightarrow z), x \rightarrow y \vdash x \rightarrow z$ ;
2.  $x \rightarrow y \wedge z, \neg x \vee y, \neg z \vee \neg(x \vee y) \vdash x \vee y$ ;
3.  $\neg(x \rightarrow y), y \vee \neg(x \vee z), y \rightarrow z \vdash x \rightarrow \neg y$ ;
4.  $x \wedge (y \rightarrow z), x \rightarrow \neg z, y \rightarrow x \wedge z \vdash y \vee (x \wedge \neg z)$ ;
5.  $x \rightarrow y \vee z, (z \rightarrow \neg x) \wedge (y \rightarrow x) \vdash x \vee (y \wedge z)$ ;
6.  $y \rightarrow x \vee z, z \rightarrow x \vee y, x \rightarrow y \vdash x \vee y \vee z$ ;
7.  $x \rightarrow y \vee \neg z, z \rightarrow y \wedge x, \neg(x \wedge y) \vdash \neg z \rightarrow x$ ;
8.  $(y \wedge (z \rightarrow x)) \wedge (y \rightarrow z), z \vee \neg(y \wedge \neg x) \vdash x \vee z$ ;
9.  $x \rightarrow \neg(y \vee z), z \rightarrow x \wedge y, x \wedge z \vdash x \rightarrow z$ ;
10.  $z \vee (y \rightarrow x), x \rightarrow (y \vee \neg z), y \wedge z \rightarrow \neg x \vdash z \vee \neg x$ ;
11.  $\neg(x \rightarrow y), z \rightarrow x \wedge y, z \vee \neg x \vdash x \rightarrow \neg(y \wedge z)$ ;
12.  $x \vee \neg y, \neg y \vee z \rightarrow x, \neg x \vee \neg z, y \vee z \vdash \neg x \vee \neg y$ ;
13.  $x \vee (y \wedge z), y \rightarrow \neg x \wedge \neg z, y \wedge (\neg z \rightarrow x) \vdash z \vee x$ ;
14.  $\neg y \wedge (x \vee z \rightarrow y), z \vee (x \wedge y), \neg(x \rightarrow y) \vdash x \vee z$ ;
15.  $x \vee (y \rightarrow z), \neg(x \rightarrow (z \rightarrow y)), ((y \rightarrow x) \rightarrow z) \vdash x \rightarrow \neg z$ ;
16.  $\neg(x \wedge y \rightarrow z), (\neg y \rightarrow z) \wedge (\neg x \rightarrow z), y \rightarrow x, \neg x \rightarrow x \vee z \vdash y \vee \neg z$ ;
17.  $x \wedge y \rightarrow \neg z, x \rightarrow \neg y, y \rightarrow x \vee z, y \vdash z \rightarrow x \vee y$ ;

18.  $\neg(x \rightarrow y) \vee z, z \rightarrow x \vee y, \neg y \wedge ((x \rightarrow \neg z) \vee y) \vdash z$ ;
19.  $x \rightarrow y \wedge z, z \rightarrow \neg(x \wedge y), x \vee (y \rightarrow z) \vdash x \vee \neg y$ ;
20.  $x \rightarrow (y \rightarrow z), \neg z \vee x, \neg(y \rightarrow (x \wedge \neg z)) \vdash z \rightarrow (\neg x \wedge (y \rightarrow z))$ ;

### 3. Исчисление высказываний

Пусть  $\Phi, \Psi, X, \Theta$  - формулы исчисления высказываний. Построить вывод формулы исчисления высказываний из данного множества гипотез.

1.  $\Phi \vdash \Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$ ;
2.  $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \rightarrow X \vdash \Phi \rightarrow \Psi \wedge X$ ;
3.  $\Phi \rightarrow X, \Psi \rightarrow X \vdash \Phi \vee \Psi \rightarrow X$ ;
4.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (X \rightarrow \Phi) \rightarrow (X \rightarrow \Psi)$ ;
5.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \wedge X \rightarrow \Psi \wedge X$ ;
6.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \vee X \rightarrow \Psi \vee X$ ;
7.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$ ;
8.  $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi$ ;
9.  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge (\neg \Phi \vee \Psi)$ ;
10.  $\Phi \vee (\neg \Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi \vee \Psi$ ;
11.  $X \rightarrow \Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash X \wedge \Theta \rightarrow \Psi \vee \neg \Theta$ ;
12.  $\Phi \rightarrow X, \Psi \wedge \Phi \vdash \Theta \rightarrow X$ ;
13.  $\Theta \rightarrow \Psi, \Theta \wedge \Phi \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee X$ ;
14.  $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$ ;
15.  $\Phi \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$ ;
16.  $\Psi \wedge (\Phi \wedge \Theta) \vdash (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$ ;
17.  $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee (\Phi \vee \neg \Theta)$ ;
18.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Theta \vdash X \wedge \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta \vee \neg \Phi)$ ;
19.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Theta \rightarrow \Phi) \rightarrow (\Theta \wedge \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi \vee \Psi)$ ;
20.  $\Phi \vee \Psi \vdash (\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Psi \vee \Theta)$ ;

### 4. Алгебраические системы.

Построить подсистему алгебраической системы  $\mathfrak{A}$ , порожденную множеством  $X$  (через  $P(B)$  обозначен булеан множества  $B$ , т.е. множество всех подмножеств множества  $B$ ):

1.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; + \rangle, X = \{3, 72\}$ ;
2.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +, 8 \rangle, X = \{32\}$ ;
3.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle, X = \{-3, 9, 6\}$ ;
4.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, 4 \rangle, X = \{-16, -8\}$ ;
5.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, - \rangle, X = \{125, 65\}$ ;
6.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, - \rangle, X = \{-36, 171, 51\}$ ;
7.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle, X = \{-8, 4\}$ ;
8.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot, 6 \rangle, X = \{132\}$ ;
9.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; - \rangle, X = \{7, 21\}$ ;
10.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -, 15 \rangle, X = \{-5, 25\}$ ;
11.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle, X = \{-16, 2\}$ ;
12.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot \rangle, X = \{1/5, -1/25\}$ ;

13.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q}; \cdot \rangle, X = \{3/4, 64/27\};$
14.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q} \setminus \{0\}; : \rangle, X = \{3\};$
15.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q} \setminus \{0\}; \cdot, 1/2 \rangle, X = \{4, -1/2\};$
16.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{R}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{5}, -1/5\};$
17.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{R} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{2}/\sqrt[3]{3}, -9/8\};$
18.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C}; \cdot \rangle, X = \{3i\};$
19.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{3}/2 - i \cdot 1/2\};$
20.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{i, -i\};$

## Контрольная работа № 2

### 1. Формулы логики предикатов

Выписать все подформулы данной формулы сигнатуры  $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$  и определить свободные и связанные переменные формулы:

1.  $\forall x((x + y \leq x) \wedge \neg (x = 0));$
2.  $\exists x(\forall y(x + y = y) \rightarrow (y \leq 0));$
3.  $\forall x \forall y((x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0));$
4.  $\forall x \forall y(((x \leq y) \wedge (y < x) \rightarrow) x = y);$
5.  $\forall x \exists y((x \leq y) \wedge \neg (x = y) \rightarrow \neg (y \leq x));$
6.  $\forall y((x + 0 = x + y) \rightarrow (y = 0));$
7.  $(x + y = 0) \rightarrow (0 \leq x) \vee \exists y(0 \leq y);$
8.  $\forall x \exists y((x \leq y) \rightarrow (x + z \leq y));$
9.  $(x \leq y) \rightarrow \exists z \neg (x + z \leq y);$
10.  $\forall x((x \cdot y \leq y) \vee \neg (0 \leq y));$
11.  $\exists x((x + x = x) \wedge \neg (x \cdot x = x));$
12.  $\forall y((x + y = z) \wedge \neg (x = 0) \rightarrow \neg (y = 0));$
13.  $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow \forall z \neg (y + z = x);$
14.  $\forall x((x \leq y + x) \rightarrow (0 \leq y)) \vee (x = z);$
15.  $\forall x(x \cdot x \leq x + x) \wedge \exists y(x + y = 0) \rightarrow (z \leq y);$
16.  $\forall x \exists z(z + y = x) \rightarrow (x \cdot y \leq z) \wedge \forall y(x + 0 = y);$
17.  $\forall x \forall y(x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0);$
18.  $\exists z((x + y \leq z) \vee (x + z = y)) \wedge \neg (x = y);$
19.  $\forall x \forall y((x + y = x) \vee \exists z(x \cdot z = y));$
20.  $\exists x((x \cdot y = x + y) \wedge \neg (x = 0) \wedge y \leq x).$

Пусть  $\Phi, \Psi, X$  - атомарные формулы логики предикатов. Выписать все подформулы данной формулы и определить свободные и связанные переменные формулы:

1.  $\neg((\exists x \forall y \Phi(x, y) \vee \exists x \exists y \Psi(x, y)) \wedge \exists y X(x, y));$
2.  $\neg((\exists x \Phi(x, y) \vee \exists z \Psi(x, z)) \vee \exists x \exists y X(x, y));$
3.  $\forall x(\exists y \Phi(x, y) \wedge \exists y \Psi(x, y)) \wedge \forall x \Psi(x, y);$
4.  $\forall x(\forall y \Phi(x, y) \vee \Psi(x, y)) \vee \forall x \exists y X(x, y);$
5.  $\neg(\forall x \exists y \Phi(x, y) \rightarrow \forall x \Psi(x, y)) \wedge \forall x \forall z X(x, z);$

6.  $\forall x\Phi(x, y) \vee \forall x(\exists y\Psi(x, y) \vee (\exists yX(x, y) \wedge \exists y\Phi(x, y)))$ ;
7.  $\forall x(\exists y\Phi(x, y) \wedge \forall x\exists y\Psi(x, y)) \wedge (\exists yX(x, y) \vee \exists y\Phi(x, y))$ ;
8.  $\neg(\forall x\neg(\forall y\Phi(x, y) \wedge y\Psi(x, y))) \rightarrow \exists y\forall xX(x, y)$ ;
9.  $\exists x\forall y\Phi(x, y) \rightarrow \neg(\forall x\neg(\forall y\Phi(x, y) \wedge \exists z\Psi(z, y)))$ ;
10.  $\exists x(\exists y\Phi(x, y) \vee \forall y\Psi(x, y)) \wedge \forall y(\Phi(x, y) \wedge \Psi(x, y))$ ;
11.  $\neg((\exists x\exists y\Phi(x, y) \wedge \exists x\forall y\Psi(x, y)) \vee \exists x\exists yX(x, y))$ ;
12.  $\exists x\Phi(x, y) \vee (\exists x\forall y\Psi(x, y) \rightarrow \exists x\exists yX(x, y))$ ;
13.  $\forall x(\neg(\exists y\Phi(x, y) \rightarrow \forall y\Psi(x, y)) \vee (\Phi(x, z) \rightarrow \forall y\Psi(x, y)))$ ;
14.  $\forall x(\exists y\Phi(x, y) \vee \forall y\Psi(x, y)) \wedge \exists x\neg(\Phi(z, y) \wedge \forall y\Psi(x, y))$ ;
15.  $\forall x\Phi(x, y) \rightarrow \exists y(\exists xX(x, y) \rightarrow \Psi(y, z) \vee \Phi(y, z))$ ;
16.  $\forall x\exists y\Phi(x, y) \wedge \forall y\forall x\Psi(x, y) \rightarrow \neg X(x, y) \wedge \Phi(x, y)$ ;
17.  $\forall x\exists y\neg(\Phi(x, y) \rightarrow \neg\Psi(x, y)) \vee \exists zX(z, y)$ ;
18.  $\forall x(\forall y\Phi(x, y) \rightarrow \exists y\Psi(x, y)) \wedge \neg(\exists yX(x, y) \vee \exists y\Phi(x, y))$ ;
19.  $\exists x\Phi(x, y) \wedge \forall x\exists y\Psi(x, y) \rightarrow \forall x\exists yX(x, y) \vee \exists y\Psi(x, y)$ ;
20.  $\exists y\forall z(\Phi(x, y) \vee \forall x\exists y\Psi(x, y) \rightarrow \exists yX(z, y)) \vee \exists y\Phi(x, y)$ .

## 2. Истинность формулы логики предикатов в алгебраической системе

В следующих задачах предикаты  $P(x)$  и  $Q(x)$  заданы на множестве всех действительных чисел. Следует определить:

– множество истинности предиката  $\neg P(x)$ ;

– справедливо ли одно из следующих соотношений  $P(x) \rightarrow Q(x)$ ,  $Q(x) \rightarrow P(x)$ .

Определить также, истинно или ложно каждое из высказываний:

а)  $\forall xP(x)$ , б)  $\exists xP(x)$  в случаях, когда предикат  $P(x)$  рассматривается на указанном в соответствующем задании интервале.

1.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 \leq 4x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| \leq 4$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(0,4)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(4, +\infty)$ .

2.  $P(x)$  задан в виде  $|x| \leq 2$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 < 1$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-\infty, 2]$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-2, 2)$ .

3.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 > x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 1$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-1, 0)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[1, +\infty)$ .

4.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 5$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале

$[1,4]$ ; б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[4,5]$ .

5.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 + 4x + 4 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 1$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[-2,2]$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0,2]$ .

6.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 6x + 8 < 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 4$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(2,4)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[3,4]$ .

7.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 \geq 16$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 - 25 > 0$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-\infty, -4)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-4,4)$ .

8.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 > 3x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 - 4x > 0$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[3,$

$+\infty)$ ; б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0,3]$ .

9.  $P(x)$  задан в виде  $|x| > 5$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 \geq 25$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-6,-5)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-6,6)$ .

10.  $P(x)$  задан в виде  $4x^2 - 1 > 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 > 1$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0,5;1)$ ;

б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(0,1)$ .



11.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 \leq 6x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| \leq 6$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(0,6)$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(6, +\infty)$ .

12.  $P(x)$  задан в виде  $|x| \leq 4$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 < 1$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-\infty, 4]$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-4, 4)$ .

13.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 > 2x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 2$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-2, 0)$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[2, +\infty)$ .

14.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 5$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[1, 4]$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[3, 6]$ .

15.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 2$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[-3, 3]$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0, 3]$ .

16.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 7x + 10 < 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 5$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(2, 6)$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[1, 6]$ .

17.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 \geq 9$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 - 16 > 0$ :

- а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-\infty, -3)$ ;
- б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-4, 4)$ .

18.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 > 5x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 - 7x > 0$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[3, +\infty)$ ; б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0,7]$ .

19.  $P(x)$  задан в виде  $|x| > 8$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 \geq 16$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-5,0)$ ;  
б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-8,8)$ .

20.  $P(x)$  задан в виде  $9x^2 - 1 > 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 > 4$ :

а)  $\forall xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $[0;1)$ ; б)  $\exists xP(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-1,2)$ .

### 3. Исчисление предикатов

Пусть  $\Phi, \Psi, X, \Theta$  – формулы исчисления предикатов. Построить вывод формулы исчисления предикатов из данного множества гипотез.

1.  $\forall y \forall x \Phi(x, y) \vdash \forall y \exists z \Phi(y, z)$ ;
2.  $\forall y \forall x \Phi(x, y) \vdash \forall y \exists x \Phi(y, x)$ ;
3.  $\forall x \Phi(x, x) \vdash \exists y \exists z \Phi(y, z)$ ;
4.  $\exists x \forall y \Phi(x, y) \vdash \exists z \Phi(z, z)$ ;
5.  $\forall y \Phi(y) \vdash \exists x (\Phi(x) \vee \Psi(x))$ ;
6.  $\exists x \Phi(x) \vee \exists x \Psi(x) \vdash \exists x (\Phi(x) \vee \Psi(x))$ ;
7.  $\forall x \Phi(x) \wedge \forall y \Psi(y) \vdash \Phi(u) \wedge \Psi(u)$ ;
8.  $\Phi(x) \vdash \Psi(y) \rightarrow \exists x \Phi(x)$ ;
9.  $\exists x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)) \vdash \forall x \Phi(x) \rightarrow \exists y \Psi(y)$ ;
10.  $\forall x \Phi(x) \rightarrow \forall y \Psi(y) \vdash \neg \Psi(x) \rightarrow \exists y \neg \Phi(y)$ ;
11.  $\forall x \Phi(x) \vee \forall y \Psi(y) \vdash \neg \Psi(x) \rightarrow \Phi(y)$ ;
12.  $\forall y \exists x (\Phi(x, y) \rightarrow \Psi(y)) \vdash \forall x (\forall z \Phi(z, x) \rightarrow \Psi(x))$ ;
13.  $\exists x \exists y (\Phi(x) \wedge \Psi(x, y)) \vdash \exists x \Phi(x) \wedge \exists y \exists z \Psi(y, z)$ ;
14.  $\forall y \Phi(y) \vee \forall x \exists y \Psi(x, y) \vdash \forall x \exists z (\Phi(x) \vee \Psi(x, z))$ ;
15.  $\exists x \forall y (\Phi(x, y) \wedge \Psi(x)) \vdash \forall x \exists z \Phi(z, x) \wedge \exists x \Psi(x)$ ;

16.  $\forall y(\Phi(x, y) \vee \Psi(x)) \vdash \exists x \exists z \Phi(z, x) \vee \exists x \Psi(x)$ ;
17.  $\exists x \forall y \exists z \Phi(x, y, z) \vdash \exists u \forall v \exists w \Phi(v, u, w)$ ;
18.  $\exists x \forall y \Phi(x, y, y) \vdash \forall u \exists z \exists v \Phi(z, u, v)$ ;
19.  $\forall x \exists z \forall y \Phi(x, y, z) \vdash \forall u \forall v \exists w \Phi(v, u, w)$ ;
20.  $\exists y \forall x \Phi(x, y, y) \vdash \exists u \exists y \exists z \Phi(u, y, z)$ .

#### 4. Машины Тьюринга

Построить машину Тьюринга  $T$ , вычисляющую следующую функцию.

1.  $x + 1$ ;
2.  $x + y$ ;
3.  $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$
4.  $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
5.  $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$
6.  $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$
7.  $\frac{x}{2}$ ;
8.  $[\frac{x}{2}]$ ;
9.  $\frac{x-y}{3}$ ;
10.  $[\frac{x-y}{3}]$ ;
11.  $\frac{2x+y}{3}$ ;
12.  $[\frac{2}{2x+y}]$ ;
13.  $\frac{3}{x+3y}$ ;
14.  $[\frac{3}{x+3y}]$ ;
15.  $f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2, \\ y & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
16.  $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } x = 2, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
17.  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < y, \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
18.  $f(x, y) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \text{ делится на } 2, \\ y - 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
19.  $f(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = y + 1, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

$$20. f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2, \\ y, & \text{если } y = 3, \\ z & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

### Вопросы к зачёту:

1. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.
2. Тождественная истинность выводимых формул.
3. Непротиворечивость исчисления высказываний.
4. Предикаты. Логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл.
5. Кванторы. Геометрический смысл квантора существования.
6. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные.
7. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы.
8. Эквивалентные формулы логики предикатов. Правила преобразования формул в эквивалентные. Нормальная форма.
9. Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тождественная истинность выводимых формул.
10. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.
11. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.
12. Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.
13. Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.
14. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.
15. Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.
16. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.

### Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр. работа (проверка и оценка)	Раздел 1- Раздел 3	ОПК-2, УК-6
2	Теоретический	Раздел 1	ОПК-2, УК-6

	тест		
3	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Раздел 1- Раздел 3	ОПК-2, УК-6
5	Зачёт во 2 семестре	Раздел 1 - Раздел 3	ОПК-2, УК-6

## **7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) математическая логика**

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) математическая логика.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющих в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

### **7.1. Учебная литература:**

#### **Основная литература**

- [1] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. Изд. 2-е, испр. и доп., — М., 1987 (5 экз). — 386 с.
- [2] Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.
- [3] Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Физматлит, 2003 (20 экз). — 256 с.
- [4] Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. — СПб.: Изд-во «Лань»,

### Дополнительная литература

- [1] Клини С. Математическая логика. — М.: Мир, 1973 (3 экз). — 480 с.
- [2] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М., Наука, 1986. — 368 с.
- [3] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Мир, 1984. — 320 с. [12 экз. + 2 экз. ранних лет]
- [4] Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. — М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004 (20 экз). – 224 с.

## 7.2. Интернет-ресурсы

Поскольку в настоящее время при работе с информацией широко используются ресурсы телекоммуникационной сети «Интернет» (далее — сеть «Интернет»), то следует указать перечень сайтов, использующихся для получения дополнительных знаний по изучаемой дисциплине. Также следует указать адрес сайта, содержащего учебную информацию по курсу (при его наличии), принципы размещения в нем информации и способы работы с сайтом.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	<b><u>Exponenta.ru</u></b>	www.exponenta.ru	На сайте размещены электронные учебники, справочники, статьи, примерами применения математических пакетов в образовательном процессе, демо-версии по популярным математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
2.	<b><u>Math.ru</u></b>	www.math.ru	Математический сайт для школьников, студентов, учителей и всех, кто интересуется математикой.
3.	<b>Математика</b>	www.mathematics.ru	Учебный материал по различным разделам математики.
4.	<b>Математика для студентов и прочее.</b>	www.xplusy.isnet.ru	Содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.
5.	<b>Российское образование.</b>	www.edu.ru	Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.

## 7.3. Программное обеспечение:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

## 7.4. Материально-техническое обеспечение

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала ( специализированное демонстрационное оборудование):

1. Доска и мел (или более современные аналогии)
2. компьютерные и мультимедийные технологии
3. микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов)

Рабочая программа дисциплины **Математическая логика** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование Математика

Программу составила:

Профессор кафедры «Математический анализ» Танкиев И.А.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ»  
Протокол №6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета  
Протокол № 7 от «13» марта 2025 г.

Приложение №1

**1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
ОПК-2	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК 3.1: Знает общие характеристики процессов сбора, передачи и обработки информации; современное состояние и тенденции развития технических и программных средств автоматизации и компьютеризации в области управления качеством; ОПК 3.2: Умеет понимать и решать профессиональные задачи в области управления научно-исследовательской и производственной деятельности в соответствии с профилем подготовки; ОПК 3.3: Владеет методами решения профессиональных задач с применением информационных технологий и соблюдением требований безопасности
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.



## 2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

### Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

### Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных

	заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

## Варианты контрольных работ.

### Контрольная работа № 1

#### 1. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы, совершенные конъюнктивные нормальные формы

Построить таблицы истинности для следующих формул алгебры высказываний и привести эти формулы к СДНФ и СКНФ двумя способами (по таблице истинности и с помощью законов алгебры высказываний (как в примерах 10,11 на стр. 9)).

1.  $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
2.  $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
3.  $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
4.  $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
5.  $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
6.  $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$
7.  $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
8.  $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
9.  $(x \vee y \rightarrow z) \Leftrightarrow (\neg z \rightarrow \neg(x \wedge y))$
10.  $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
11.  $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
12.  $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
13.  $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
14.  $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
15.  $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$
16.  $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
17.  $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
18.  $\neg(\neg(x \vee z \rightarrow y) \vee (y \wedge \neg z \rightarrow x \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
19.  $\neg((z \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
20.  $(z \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))$

#### 2. Логическое следствие в алгебре высказываний

Проверить истинность соотношений тремя способами (используя определение логического

следствия и пп. 3,4 теоремы 2. ►

1.  $x \rightarrow (y \rightarrow z), x \rightarrow y \vdash x \rightarrow z$ ;
2.  $x \rightarrow y \wedge z, \neg x \vee y, \neg z \vee \neg(x \vee y) \vdash x \vee y$ ;

3.  $\neg(x \rightarrow y), y \vee \neg(x \vee z), y \rightarrow z \vdash x \rightarrow \neg y$ ;
4.  $x \wedge (y \rightarrow z), x \rightarrow \neg z, y \rightarrow x \wedge z \vdash y \vee (x \wedge \neg z)$ ;
5.  $x \rightarrow y \vee z, (z \rightarrow \neg x) \wedge (y \rightarrow x) \vdash x \vee (y \wedge z)$ ;
6.  $y \rightarrow x \vee z, z \rightarrow x \vee y, x \rightarrow y \vdash x \vee y \vee z$ ;
7.  $x \rightarrow y \vee \neg z, z \rightarrow y \wedge x, \neg(x \wedge y) \vdash \neg z \rightarrow x$ ;
8.  $(y \wedge (z \rightarrow x)) \wedge (y \rightarrow z), z \vee \neg(y \wedge \neg x) \vdash x \vee z$ ;
9.  $x \rightarrow \neg(y \vee z), z \rightarrow x \wedge y, x \wedge z \vdash x \rightarrow z$ ;
10.  $z \vee (y \rightarrow x), x \rightarrow (y \vee \neg z), y \wedge z \rightarrow \neg x \vdash z \vee \neg x$ ;
11.  $\neg(x \rightarrow y), z \rightarrow x \wedge y, z \vee \neg x \vdash x \rightarrow \neg(y \wedge z)$ ;
12.  $x \vee \neg y, \neg y \vee z \rightarrow x, \neg x \vee \neg z, y \vee z \vdash \neg x \vee \neg y$ ;
13.  $x \vee (y \wedge z), y \rightarrow \neg x \wedge \neg z, y \wedge (\neg z \rightarrow x) \vdash z \vee x$ ;
14.  $\neg y \wedge (x \vee z \rightarrow y), z \vee (x \wedge y), \neg(x \rightarrow y) \vdash x \vee z$ ;
15.  $x \vee (y \rightarrow z), \neg(x \rightarrow (z \rightarrow y)), ((y \rightarrow x) \rightarrow z) \vdash x \rightarrow \neg z$ ;
16.  $\neg(x \wedge y \rightarrow z), (\neg y \rightarrow z) \wedge (\neg x \rightarrow z), y \rightarrow x, \neg x \rightarrow x \vee z \vdash y \vee \neg z$ ;
17.  $x \wedge y \rightarrow \neg z, x \rightarrow \neg y, y \rightarrow x \vee z, y \vdash z \rightarrow x \vee y$ ;
18.  $\neg(x \rightarrow y) \vee z, z \rightarrow x \vee y, \neg y \wedge ((x \rightarrow \neg z) \vee y) \vdash z$ ;
19.  $x \rightarrow y \wedge z, z \rightarrow \neg(x \wedge y), x \vee (y \rightarrow z) \vdash x \vee \neg y$ ;
20.  $x \rightarrow (y \rightarrow z), \neg z \vee x, \neg(y \rightarrow (x \wedge \neg z)) \vdash z \rightarrow (\neg x \wedge (y \rightarrow z))$ ;

### 3. Исчисление высказываний

Пусть  $\Phi, \Psi, X, \Theta$  - формулы исчисления высказываний. Построить вывод формулы исчисления высказываний

из данного множества гипотез.

1.  $\Phi \vdash \Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$ ;
2.  $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \rightarrow X \vdash \Phi \rightarrow \Psi \wedge X$ ;
3.  $\Phi \rightarrow X, \Psi \rightarrow X \vdash \Phi \vee \Psi \rightarrow X$ ;
4.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (X \rightarrow \Phi) \rightarrow (X \rightarrow \Psi)$ ;
5.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \wedge X \rightarrow \Psi \wedge X$ ;
6.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \vee X \rightarrow \Psi \vee X$ ;
7.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$ ;
8.  $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi$ ;
9.  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge (\neg \Phi \vee \Psi)$ ;
10.  $\Phi \vee (\neg \Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi \vee \Psi$ ;

11.  $X \rightarrow \Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash X \wedge \Theta \rightarrow \Psi \vee \neg \Theta$  ;
12.  $\Phi \rightarrow X, \Psi \wedge \Phi \vdash \Theta \rightarrow X$  ;
13.  $\Theta \rightarrow \Psi, \Theta \wedge \Phi \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee X$  ;
14.  $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$  ;
15.  $\Phi \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$  ;
16.  $\Psi \wedge (\Phi \wedge \Theta) \vdash (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$  ;
17.  $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee (\Phi \vee \neg \Theta)$  ;
18.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Theta \vdash X \wedge \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta \vee \neg \Phi)$  ;
19.  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Theta \rightarrow \Phi) \rightarrow (\Theta \wedge \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi \vee \Psi)$  ;
20.  $\Phi \vee \Psi \vdash (\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Psi \vee \Theta)$  ;

#### 4. Алгебраические системы.

Построить подсистему алгебраической системы  $\mathfrak{A}$ , порожденную множеством  $X$  (через  $P(B)$ )

обозначен булеан множества  $B$ , т.е. множество всех подмножеств множества  $B$ ):

1.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; + \rangle, X = \{3, 72\}$ ;
2.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +, 8 \rangle, X = \{32\}$ ;
3.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle, X = \{-3, 9, 6\}$ ;
4.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, 4 \rangle, X = \{-16, -8\}$ ;
5.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, - \rangle, X = \{125, 65\}$ ;
6.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, - \rangle, X = \{-36, 171, 51\}$  ;
7.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle, X = \{-8, 4\}$ ;
8.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot, 6 \rangle, X = \{132\}$ ;
9.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; - \rangle, X = \{7, 21\}$ ;
10.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -, 15 \rangle, X = \{-5, 25\}$ ;
11.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle, X = \{-16, 2\}$ ;
12.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot \rangle, X = \{1/5, -1/25\}$ ;
13.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot \rangle, X = \{3/4, 64/27\}$  ;
14.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{3\}$ ;
15.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot, 1/2 \rangle, X = \{4, -1/2\}$ ;
16.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{5}, -1/5\}$ ;
17.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt[2]{3}, -9/8\}$ ;
18.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot \rangle, X = \{3i\}$ ;
19.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{3}/2 - i \cdot 1/2\}$ ;
20.  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{i, -i\}$ ;

### Контрольная работа № 2

#### 1. Формулы логики предикатов

Выписать все подформулы данной формулы сигнатуры  $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$  и определить свободные и связанные переменные формулы:

1.  $\forall x((x + y \leq x) \wedge \neg (x = 0))$ ;
2.  $\exists x(\forall y(x + y = y) \rightarrow (y \leq 0))$ ;
3.  $\forall x \forall y((x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$ ;

4.  $\forall x \forall y (((x \leq y) \wedge (y < x) \rightarrow) x = y);$
5.  $\forall x \exists y ((x \leq y) \wedge \neg (x = y) \rightarrow \neg (y \leq x));$
6.  $\forall y ((x + 0 = x + y) \rightarrow (y = 0));$
7.  $(x + y = 0) \rightarrow (0 \leq x) \vee \exists y (0 \leq y);$
8.  $\forall x \exists y ((x \leq y) \rightarrow (x + z \leq y));$
9.  $(x \leq y) \rightarrow \exists z \neg (x + z \leq y);$
10.  $\forall x ((x \cdot y \leq y) \vee \neg (0 \leq y));$
11.  $\exists x ((x + x = x) \wedge \neg (x \cdot x = x));$
12.  $\forall y ((x + y = z) \wedge \neg (x = 0) \rightarrow \neg (y = 0));$
13.  $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow \forall z \neg (y + z = x);$
14.  $\forall x ((x \leq y + x) \rightarrow (0 \leq y)) \vee (x = z);$
15.  $\forall x (x \cdot x \leq x + x) \wedge \exists y (x + y = 0) \rightarrow (z \leq y);$
16.  $\forall x \exists z (z + y = x) \rightarrow (x \cdot y \leq z) \wedge \forall y (x + 0 = y);$
17.  $\forall x \forall y (x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0);$
18.  $\exists z ((x + y \leq z) \vee (x + z = y)) \wedge \neg (x = y);$
19.  $\forall x \forall y ((x + y = x) \vee \exists z (x \cdot z = y));$
20.  $\exists x ((x \cdot y = x + y) \wedge \neg (x = 0) \wedge y \leq x).$

Пусть  $\Phi, \Psi, X$  - атомарные формулы логики предикатов. Выписать все подформулы данной формулы и определить свободные и связанные переменные формулы:

1.  $\neg((\exists x \forall y \Phi(x, y) \vee \exists x \exists y \Psi(x, y)) \wedge \exists y X(x, y));$
2.  $\neg((\exists x \Phi(x, y) \vee \exists z \Psi(x, z)) \vee \exists x \exists y X(x, y));$
3.  $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \wedge \exists y \Psi(x, y)) \wedge \forall x \Psi(x, y);$
4.  $\forall x (\forall y \Phi(x, y) \vee \Psi(x, y)) \vee \forall x \exists y X(x, y);$
5.  $\neg(\forall x \exists y \Phi(x, y) \rightarrow \forall x \Psi(x, y)) \wedge \forall x \forall z X(x, z);$
6.  $\forall x \Phi(x, y) \vee \forall x (\exists y \Psi(x, y) \vee (\exists y X(x, y) \wedge \exists y \Phi(x, y)));$
7.  $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \wedge \forall x \exists y \Psi(x, y)) \wedge (\exists y X(x, y) \vee \exists y \Phi(x, y));$
8.  $\neg(\forall x \neg(\forall y \Phi(x, y) \wedge y \Psi(x, y))) \rightarrow \exists y \forall x X(x, y);$
9.  $\exists x \forall y \Phi(x, y) \rightarrow \neg(\forall x \neg(\forall y \Phi(x, y) \wedge \exists z \Psi(z, y)));$
10.  $\exists x (\exists y \Phi(x, y) \vee \forall y \Psi(x, y)) \wedge \forall y (\Phi(x, y) \wedge \Psi(x, y));$
11.  $\neg((\exists x \exists y \Phi(x, y) \wedge \exists x \forall y \Psi(x, y)) \vee \exists x \exists y X(x, y));$
12.  $\exists x \Phi(x, y) \vee (\exists x \forall y \Psi(x, y) \rightarrow \exists x \exists y X(x, y));$
13.  $\forall x (\neg(\exists y \Phi(x, y) \rightarrow \forall y \Psi(x, y)) \vee (\Phi(x, z) \rightarrow \forall y \Psi(x, y)));$
14.  $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \vee \forall y \Psi(x, y)) \wedge \exists x \neg(\Phi(z, y) \wedge \forall y \Psi(x, y));$
15.  $\forall x \Phi(x, y) \rightarrow \exists y (\exists x X(x, y) \rightarrow \Psi(y, z) \vee \Phi(y, z));$
16.  $\forall x \exists y \Phi(x, y) \wedge \forall y \forall x \Psi(x, y) \rightarrow \neg X(x, y) \wedge \Phi(x, y);$
17.  $\forall x \exists y \neg(\Phi(x, y) \rightarrow \neg \Psi(x, y)) \vee \exists z X(z, y);$
18.  $\forall x (\forall y \Phi(x, y) \rightarrow \exists y \Psi(x, y)) \wedge \neg(\exists y X(x, y) \vee \exists y \Phi(x, y));$
19.  $\exists x \Phi(x, y) \wedge \forall x \exists y \Psi(x, y) \rightarrow \forall x \exists y X(x, y) \vee \exists y \Psi(x, y);$
20.  $\exists y \forall z (\Phi(x, y) \vee \forall x \exists y \Psi(x, y) \rightarrow \exists y X(z, y)) \vee \exists y \Phi(x, y).$

## 2. Истинность формулы логики предикатов в алгебраической системе

В следующих задачах предикаты  $P(x)$  и  $Q(x)$  заданы на множестве всех действительных чисел. Следует определить:

– множество истинности предиката  $\neg P(x)$ ;

– справедливо ли одно из следующих соотношений  $P(x) \rightarrow Q(x)$ ,

$Q(x) \rightarrow P(x)$ . Определить также, истинно или ложно каждое из высказываний:

а)  $\forall x P(x)$ , б)  $\exists x P(x)$  в случаях, когда предикат  $P(x)$  рассматривается на указанном в соответствующем задании интервале.

1.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 \leq 4x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| \leq 4$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(0,4)$ ; б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(4, +\infty)$ .

2.  $P(x)$  задан в виде  $|x| \leq 2$ ,  $Q(x)$  – в виде  $x^2 < 1$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-\infty, 2+)$ ; б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-2, 2)$ .

3.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 > x$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 1$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $(-1, 0)$ ; б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $*1, +\infty)$ .

4.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 5$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $*1, 4+$ ; б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $*4, 5+$ .

5.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 + 4x + 4 = 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| > 1$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $*-2, 2]$ ; б)  $\exists x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале  $*0, 2+$ .

6.  $P(x)$  задан в виде  $x^2 - 6x + 8 < 0$ ,  $Q(x)$  – в виде  $|x| < 4$ :

а)  $\forall x P(x)$ , где предикат  $P(x)$  рассматривается на интервале (2,4);

### Вопросы к зачёту:

1. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.
2. Тавтологическая истинность выводимых формул.
3. Непротиворечивость исчисления высказываний.
4. Предикаты. Логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл.
5. Кванторы. Геометрический смысл квантора существования.
6. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные.
7. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы.
8. Эквивалентные формулы логики предикатов. Правила преобразования формул в эквивалентные. Нормальная форма.
9. Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тавтологическая истинность выводимых формул.
10. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.
11. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.
12. Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.
13. Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.
14. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.
15. Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.
16. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.

**Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений**

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой