

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

**СОГЛАСОВАНА**

**УТВЕРЖДАЮ**

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

\_\_\_\_\_/проф. И.А.Танкиев  
от «27» февраля 2025г.

\_\_\_\_\_/Б.С. Кульбужев  
от «14» марта 2025г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.03 Дифференциальная геометрия и топология**

**Направление подготовки**

**01.03.01 –МАТЕМАТИКА**

Квалификация выпускника

**БАКАЛАВР**

Форма обучения

**Очная**

Магас, 2025г

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Дифференциальная геометрия и топология" являются:

- формирование базовых знаний по дифференциальной геометрии и топологии для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование математической культуры; фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний;
- формирование исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

**Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников**

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
	В	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ	6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6

**Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата**

Дисциплина Б1.В.03. "Дифференциальная геометрия и топология" изучается в первом семестре третьего курса. По данной дисциплине студенты сдают экзамен. Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» является логическим продолжением базового курса «Аналитическая геометрия». Она требует знаний основных фактов аналитической геометрии, математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. Результаты освоения дисциплины (модуля) Дифференциальная геометрия и топология

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-1	Способен определить общие формы и закономерности отдельной предметной области	ПК-1.1: Знает особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики. ПК-1.2: Умеет системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы ПК-1.3: Владеет современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры данной дисциплины.

#### 4. Структура и содержание дисциплины (модуля) Дифференциальная геометрия и топология

##### 4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 108 часов.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра			
		5			
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	3 з.е.				
Курсовой проект (работа)	не предусмотрено				
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	144	144			
Лекции	72	72			
Практические занятия, семинары	42	42			
Лабораторные работы					
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	81	81			
КСР					
Экзамен					
Общая трудоемкость дисциплины	252	252			

№/ №	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)										Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Формы промежут. аттест						
			Аудиторная работа					Самостоятельная работа											
			всего	лекции	Практ. занятия	Лаборат. занятия	Др. виды контак. раб.	Всего	Курсов. раб( .проект)	Подготовка к экз.	Другие виды	Собеседование	Колоквиум	Проверка тестов	Проверка контр.раб	Проверка реферата	Проверка эссе и	Курсовая работа	
	<b>5 семестр</b>		<b>108</b>	<b>36</b>	<b>32</b>			<b>40</b>											
1	Вектор-функции			2	2			2											
2	Касательная, главная нормаль и бинормаль линии			2	2			2											
3	Кривизна линии			2	4			2											
4	Кручение линии			2	4			2											
5	Поверхности			2	4			2											
6	Касательная плоскость к поверхности			2	4			2											
7	Нормаль к поверхности			2	4			2											
8	Первая квадратичная форма поверхности			2	4			4											
9	Вторая квадратичная форма поверхности			2	4			4											
Общая трудоемкость, в часах			252	72	42	-	-	81	-			Промежуточная аттестация							
												Форма							
												Зачет					-		
												Зачет с оценкой					-		
												Экзамен					6		

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля)

##### 5 семестр

1. Вектор-функции
2. Касательная, главная нормаль и бинормаль линии
3. Кривизна линии
4. Кручение линии
5. Поверхности

6. Касательная плоскость к поверхности
7. Нормаль к поверхности
8. Первая квадратичная форма поверхности
9. Вторая квадратичная форма поверхности

#### **6 семестр**

10. Гауссова кривизна поверхности
11. Средняя кривизна поверхности
12. Геодезические линии на поверхности
13. Топологические пространства
14. Непрерывные отображения
15. Произведения пространств
16. Компактные пространства
17. Хаусдорфовы пространства
18. Связные пространства

#### **Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)**

Не предусмотрены учебным планом ООП

#### **Примерная тематика курсовых работ**

Не предусмотрены учебным планом ООП

## 5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### 6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
<b>5 семестр</b>			
<b>1</b>	Вектор-функции	Аудиторная работа	2
<b>2</b>	Касательная, главная нормаль и бинормаль линии	Аудиторная работа	2
<b>3</b>	Кривизна линии	Аудиторная работа	2
<b>4</b>	Кручение линии	Теоретический тест	2
<b>5</b>	Поверхности	Аудиторная работа	2
<b>6</b>	Касательная плоскость к поверхности	Аудиторная работа	2
<b>7</b>	Нормаль к поверхности	Аудиторная работа	2
<b>8</b>	Первая квадратичная форма поверхности	Контрольная работа	4
<b>9</b>	Вторая квадратичная форма поверхности	Аудиторная работа	4
<b>6 семестр</b>			
<b>10</b>	Гауссова кривизна поверхности	Аудиторная работа	1
<b>11</b>	Средняя кривизна поверхности	Аудиторная работа	1
<b>12</b>	Геодезические линии на поверхности	Контрольная работа	1
<b>13</b>	Топологические пространства	Аудиторная работа	1
<b>14</b>	Непрерывные отображения	Аудиторная работа	1
<b>15</b>	Произведения пространств	Аудиторная работа	1
<b>16</b>	Компактные пространства	Аудиторная работа	1
<b>17</b>	Хаусдорфовы пространства	Аудиторная работа	1
<b>18</b>	Связные пространства	Контрольная работа	1

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета**

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена**

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.



«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
-----------------------	--

## **6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов**

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

### **Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы**

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

### **Организация и руководство внеаудиторной работы**

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев

оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

### **6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов**

Для самостоятельной работы студентам подготовлены следующие вопросы:

1. Определение и примеры компактных подмножеств и пространств.
2. Критерий компактности подмножества.
3. Компактность отрезка из  $\mathbb{R}$ .
4. Образ компактного подмножества.
5. Аксиомы отделимости. Критерий замкнутости одноточечного подмножества.
6. Компактные подмножества хаусдорфова пространства.
7. Биекции компактного пространства в хаусдорфово.
8. Подпространства хаусдорфова пространства.
9. Критерий хаусдорфовости произведения.
10. Достаточное условие хаусдорфовости фактор пространства.
11. Фактор пространство компактного хаусдорфова  $G$ - пространства по конечной группе.
12. Определение и примеры связных пространств и связных подмножеств.
13. Критерий связности. Связность отрезка из  $\mathbb{R}$ .
14. Образ связного пространства.
15. Объединение связных пространств с непустым пересечением.
16. Критерий связности произведения.

Во время лекционных и практических занятий самостоятельная работа реализуется в виде решения студентами индивидуальных заданий, изучения части теоретического материала, предусмотренного учебным планом ООП.

Во внеаудиторное время студент изучает рекомендованную литературу, готовится к лекционным и практическим занятиям, собеседованиям, устным опросам, коллоквиуму и контрольным работам. При подготовке можно опираться на конспект лекций и литературу, предложенную в разделе 9 данной рабочей программы. В указанном разделе расположен список основной и дополнительной литературы, а также необходимые Интернет-ресурсы. Подготовка теоретического сообщения на практическое занятие выполняется студентом самостоятельно, но по согласованию с преподавателем темы сообщения. Это может быть, например, сообщение о жизни и деятельности великих ученых-математиков, теоремы, которых изучаются в данном курсе, или интересные замечания, факты по теме лекции (практического занятия).

### Контрольная работа по теме «Кривизна и кручение»

1. Найдите кривизну и кручение винтового пути  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  в произвольной точке.
2. Докажите, что для следующего пути кривизна равна его кручению:  
 $x = a \cosh t$ ,  $y = a \sinh t$ ,  $z = at$ ;
3. Найдите кривизну и кручение следующего пути:  
 $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = \sqrt{2}t$ ;
4. Найдите точки  $t$ , в которых кривизна пути  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $z = \cos 2t$  имеет минимальное значение (локальное).
5. Докажите, что следующий путь плоский, и составьте уравнение плоскости, в которой расположен его образ:

$$x = \frac{1+t}{1-t}, y = \frac{1}{1-t^2}, z = \frac{1}{1+t}$$

### Контрольная работа по теме «Касательная плоскость и нормаль поверхности»

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = uv$  в точке с криволинейными координатами  $u = 2$ ,  $v = 1$ .
2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x = u$ ,  $y = u - 2uv$ ,  $z = u^3 - 3u^2v$  в точке с декартовыми координатами  $(1, 3, 4)$ .
3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к следующей поверхности в указанной точке:  
 $z = x^3 + y^3$  в точке  $M = (1, 2, 9)$ ;
4. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  в произвольной точке.
5. Докажите, что касательные плоскости к поверхности  $xyz = a^3$  образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

### Контрольная работа по теме «Топологические пространства»

1. Доказать, что если  $Y$  – подмножество топологического пространства, то  $Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $Y = \bar{Y}$ ,
2. Доказать, что  $dY = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $Y$  одновременно открыто и замкнуто.
3. Доказать, что  $X \setminus \dot{Y} = \overline{(X \setminus Y)}$ .

### Примерный вариант семестрового задания

1. На поверхности с первой квадратичной формой  $I = du^2 + \sinh^2 u dv^2$  найдите длину линии  $u = v$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  с криволинейными координатами  $(u_1, u_1)$  и  $(u_2, u_2)$ .
2. На поверхности с первой квадратичной формой

$$I = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2$$

Найдите длину линии  $v = au$  между точками ее пересечения с линиями  $u = 1$  и  $u = 2$ .

3. Найдите, под каким углом пересекаются линии  $u + v = 0$ ,  $u - v = 0$  на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = av.$$

4. Найдите периметр и внутренние углы криволинейного треугольника  $u = \pm av^2/2$ ,  $v = 1$ , расположенного на поверхности, у которой  $I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$ .

5. Найдите угол между линиями  $v = 2u$  и  $v = -2u$  на поверхности, имеющей первую квадратичную форму  $I = du^2 + dv^2$ .

6. Найдите угол между линиями  $v = u+1$  и  $v=3-u$  на поверхностях  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ .

7. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ , ограниченного линиями  $u = 0$ ,  $u = a$ ,  $v = 0$ ,  $v = 1$ .

8. Найдите вторую квадратичную форму прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .

9. Покажите, что при любом выборе параметризации плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

10. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .

11. Докажите, что главные направления прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  делят пополам углы между направлениями прямолинейной образующей и винтовой линии.

12. Вычислите главные кривизны поверхности

$$x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$$

в точке  $P$  с криволинейными координатами  $u = 1$ ,  $v = 1$ .

13. Найдите гауссову и среднюю кривизну прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .

14. Доказать, что если  $Y$  — подмножество топологического пространства, то  $Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $Y = \bar{Y}$ .

15. Доказать, что  $dY = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $Y$  одновременно открыто и замкнуто.

16. Доказать, что  $X \setminus \dot{Y} = \overline{(X \setminus Y)}$ .

17. Доказать, что топологическое пространство  $X$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ  $D = \{(x, x) : x \in X\}$  замкнута в  $X \times X$ .

18. Пусть  $X$  - компактное хаусдорфово пространство и  $Y$  - фактор-пространство, определенное отображением  $f: X \rightarrow Y$ . Докажите, что  $Y$  тогда и только тогда хаусдорфово, когда  $f$ - замкнутое отображение.

19. Пусть  $A$  - связное подпространство топологического пространства  $X$  и  $A \subset Y \subset A$ . Докажите, что  $Y$  - связно.

### Экзаменационные вопросы

1. Понятие кривой. Элементарная кривая. Общая кривая.
2. Регулярная кривая. Способы аналитического задания кривой.
3. Векторная функция скалярного аргумента.
4. Понятие производной вектор  $f$ .
5. Понятие интеграла вектор функции  $f$ .

6. Особые точки регулярных плоских кривых.
7. Касательная кривой. Теорема.
8. Уравнение касательной для различных случаев аналитического задания кривой.
9. Соприкасающаяся плоскость кривой. Теорема.
10. Уравнение соприкасающейся плоскости.
11. Длина дуги кривой.
12. Кривизна кривой. Вычисление кривизны кривой.
13. Радиус и круг кривизны. Центр кривизны.
14. Эволюта и эвольвента.
15. Кручение кривой.
16. Естественный трехгранник пространственной кривой.
17. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.
18. Простая поверхность (общая поверхность).
19. Регулярная поверхность (аналитическое задание поверхности).
20. Касательная плоскость поверхности.
21. Первая квадратичная форма.
22. Площадь поверхности.
23. Вторая квадратичная форма.
24. Кривизна кривой.
25. Средняя и гауссова кривизна.

***Контроль освоения компетенций***

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр.работа(проверка и оценка)	Тема 1- Тема 18	УК-6, ПК-1
2	Теоретический тест	Тема 4	УК-6, ПК-1
3	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Тема 1- Тема 18	УК-6, ПК-1

4	экзамен в 6 семестре	Тема 1- Тема 18	УК-6, ПК-1
---	-------------------------	-----------------	------------

## **7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) дифференциальная геометрия и топология**

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) дифференциальная геометрия и топология.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющихся в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

### **7.1. Учебная литература:**

#### **Рекомендуемая литература**

1. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии/ П. К. Рашевский - М.:ЛКИ, 2008.-432 с.
2. Белько И.В., Бурдун А. А., Ведерников В.И., Феденко А.С. Дифференциальная геометрия/ И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.И. Ведерников, А.С. Феденко - Минск: Изд-во БГУ, 1982. - - 256 с.
3. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии/. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко — М.: Физматлит, 2004,-304 с.
4. Сборник задач по дифференциальной геометрии / Под ред. А. С. Феденко - М.: Наука, 1979.-272 с.
5. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.И., Фоменко Т.Н. Введение в топологию/ Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.И. Израилевич, Т.Н. Фоменко — М., Наука, Физматлит, 1995.-416 с.

6. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии/ А.Т. Фоменко, Д.Б.Фукс - М.: "Наука", 1989.-528 с

**б) дополнительная литература:**

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения/ Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко - М.: Наука, 1979. - 760 с.
2. КобаясиШ Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1/ Ш. Кобаяси, К. Номидзу - М.: Наука, 1981. - 344 с.
3. КобаясиШ Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2/ Ш. Кобаяси, К. Номидзу - М.: Наука, 1981. - 416 с.

**7.2. Интернет-ресурсы**

Поскольку в настоящее время при работе с информацией широко используются ресурсы телекоммуникационной сети «Интернет» (далее — сеть «Интернет»), то следует указать перечень сайтов, использующихся для получения дополнительных знаний по изучаемой дисциплине. Также следует указать адрес сайта, содержащего учебную информацию по курсу (при его наличии), принципы размещения в нем информации и способы работы с сайтом.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	<b><u>Exponenta</u></b> .ru	www.exponenta.ru	На сайте размещены электронные учебники, справочники, статьи, примерами применения математических пакетов в образовательном процессе, демо-версии по популярным математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
2.	<b><u>Math</u></b> .ru	www.math.ru	Математический сайт для школьников, студентов, учителей и всех, кто интересуется математикой.
3.	<b>Математика</b>	www.mathematics.ru	Учебный материал по различным разделам математики.
4.	<b>Математика для студентов и прочее.</b>	www.xplusy.isnet.ru	Содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.
5.	<b>Российское образование.</b>	www.edu.ru	Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.

**7.3. Программное обеспечение:**

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

**7.4. Материально-техническое обеспечение**

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала ( специализированное демонстрационное оборудование):

1. Доска и мел (или более современные аналоги)
2. компьютерные и мультимедийные технологии
- 3.микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов)



Рабочая программа дисциплины **Дифференциальная геометрия и топология** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018г №8, с учетом рекомендаций ОПОП направления 01.03.01 Математика, профессионального стандарта 01.001 Образование, утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013г №544н.

Программу составил:

Ст. преподаватель кафедры «Математический анализ» Оздоева Е.В.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ» Протокол № 6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета протокол № 7 от «13» марта 2024 г.

## Приложение №1

### **1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица 1.

### **Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы**

### **2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания**

Таблица 2.

#### **Сопоставление шкал оценивания**

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

#### **Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса**

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии

Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий);</li> <li>- Самостоятельность ответа;</li> <li>- Культура речи.</li> </ul>	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает
------------------------------	---	--

		дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.

Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен
		ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

#### Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий);</li> <li>- Самостоятельность ответа;</li> <li>- Культура речи.</li> </ul>	<p>выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы</p>

Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует
		вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

#### Оценивание ответа на зачете

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
≈ 3		

	Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий);</li> <li>- Самостоятельность ответа;</li> <li>- Культура речи.</li> </ul>	<p>выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы</p>
	Хорошо (базовый уровень)		<p>основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на</p>
			<p>дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы</p>

	Удовлетворительно (пороговый уровень)	имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
«Не зачтено»	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)	тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

#### Оценивание ответа на зачете

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их
	выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Таблица 6.

#### Оценивание ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
--------	---

«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

**Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов**  
Для самостоятельной работы студентам подготовлены следующие вопросы:



1. Определение и примеры компактных подмножеств и пространств.
2. Критерий компактности подмножества.
3. Компактность отрезка из  $\mathbb{R}$ .
4. Образ компактного подмножества.
5. Аксиомы отделимости. Критерий замкнутости одноточечного подмножества.
6. Компактные подмножества хаусдорфова пространства.
7. Биекции компактного пространства в хаусдорфово.
8. Подпространства хаусдорфова пространства.
9. Критерий хаусдорфовости произведения.
10. Достаточное условие хаусдорфовости фактор пространства.
11. Фактор пространство компактного хаусдорфова  $G$ -пространства по конечной группе.
12. Определение и примеры связных пространств и связных подмножеств.
13. Критерий связности. Связность отрезка из  $\mathbb{R}$ .
14. Образ связного пространства.
15. Объединение связных пространств с непустым пересечением.
16. Критерий связности произведения.

### Контрольная работа по теме «Кривизна и кручение»

1. Найдите кривизну и кручение винтового пути  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  в произвольной точке.
2. Докажите, что для следующего пути кривизна равна его кручению:  
 $x = a \cosh t$ ,  $y = a \sinh t$ ,  $z = at$ ;
3. Найдите кривизну и кручение следующего пути:  
 $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = \sqrt{2} t$ ;
4. Найдите точки  $t$ , в которых кривизна пути  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $z = \cos 2t$  имеет минимальное значение (локальное).
5. Докажите, что следующий путь плоский, и составьте уравнение плоскости, в которой расположен его образ:

$$x = \frac{1+t}{1-t}, y = \frac{1}{1-t^2}, z = \frac{1}{1+t}$$

### Контрольная работа по теме «Касательная плоскость и нормаль поверхности»

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = uv$  в точке с криволинейными координатами  $u = 2$ ,  $v = 1$ .

2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x = u$ ,  $y = u - 2uv$ ,  $z = u^3 - 3u^2v$  в точке с декартовыми координатами (1,3,4).
3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к следующей поверхности в указанной точке:  
 $z = x^3 + y^3$  в точке  $M = (1, 2, 9)$ ;
4. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  в произвольной точке.
5. Докажите, что касательные плоскости к поверхности  $xyz = a^3$  образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

### Контрольная работа по теме «Топологические пространства»

1. Доказать, что если  $Y$  – подмножество топологического пространства, то  $Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $Y = \bar{Y}$ ,
2. Доказать, что  $dY = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $Y$  одновременно открыто и замкнуто.
3. Доказать, что  $X \setminus \dot{Y} = \overline{(X \setminus Y)}$ .

### Примерный вариант семестрового задания

1. На поверхности с первой квадратичной формой  $I = du^2 + sh^2 u dv^2$  найдите длину линии  $u = v$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  с криволинейными координатами  $(u_1, u_1)$  и  $(u_2, u_2)$ .
2. На поверхности с первой квадратичной формой  $I = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uv du dv + (8v^2 + u^2)dv^2$  найдите длину линии  $v = au$  между точками ее пересечения с линиями  $u = 1$  и  $u = 2$ .
3. Найдите, под каким углом пересекаются линии  $u + v = 0$ ,  $u - v = 0$  на прямом геликоиде  
$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = av.$$
4. Найдите периметр и внутренние углы криволинейного треугольника  $u = \pm av^2/2$ ,  $v = 1$ , расположенного на поверхности, у которой  $I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$ .
5. Найдите угол между линиями  $v = 2u$  и  $v = -2u$  на поверхности, имеющей первую квадратичную форму  $I = du^2 + dv^2$ .
6. Найдите угол между линиями  $v = u+1$  и  $v = 3-u$  на поверхностях  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ .
7. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ , ограниченного линиями  $u = 0$ ,  $u = a$ ,  $v = 0$ ,  $v = 1$ .
8. Найдите вторую квадратичную форму прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .
9. Покажите, что при любом выборе параметризации плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.
10. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .

11. Докажите, что главные направления прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  делят пополам углы между направлениями прямолинейной образующей и винтовой линии.
12. Вычислите главные кривизны поверхности  

$$x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$$
в точке P с криволинейными координатами  $u = 1, v = 1$ .
13. Найдите гауссову и среднюю кривизну прямого геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .
14. Доказать, что если  $Y$  — подмножество топологического пространства, то  $Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $Y = \bar{Y}$ .
15. Доказать, что  $dY = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $Y$  одновременно открыто и замкнуто.
16. Доказать, что  $X \setminus \dot{Y} = \overline{(X \setminus Y)}$ .
17. Доказать, что топологическое пространство  $X$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ  $D = \{(x, x) : x \in X\}$  замкнута в  $X \times X$ .
18. Пусть  $X$  - компактное хаусдорфово пространство и  $Y$  - фактор-пространство, определенное отображением  $f: X \rightarrow Y$ . Докажите, что  $Y$  тогда и только тогда хаусдорфово, когда  $f$ - замкнутое отображение.
19. Пусть  $A$  - связное подпространство топологического пространства  $X$  и  $A \subset Y \subset A$ . Докажите, что  $Y$  -связно.

### Экзаменационные вопросы

1. Понятие кривой. Элементарная кривая. Общая кривая.
2. Регулярная кривая. Способы аналитического задания кривой.
3. Векторная функция скалярного аргумента.
4. Понятие производной вектор  $f$ .
5. Понятие интеграла вектор функции  $f$ .
6. Особые точки регулярных плоских кривых.
7. Касательная кривой. Теорема.
8. Уравнение касательной для различных случаев аналитического задания кривой.
9. Соприкасающаяся плоскость кривой. Теорема.
10. Уравнение соприкасающейся плоскости.
11. Длина дуги кривой.
12. Кривизна кривой. Вычисление кривизны кривой.
13. Радиус и круг кривизны. Центр кривизны.
14. Эволюта и эвольвента.
15. Кручение кривой.
16. Естественный трехгранник пространственной кривой.
17. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.

18. Простая поверхность (общая поверхность).
19. Регулярная поверхность (аналитическое задание поверхности).
20. Касательная плоскость поверхности.
21. Первая квадратичная форма.
22. Площадь поверхности.
23. Вторая квадратичная форма.
24. Кривизна кривой.
25. Средняя и гауссова кривизна.

**Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений**

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой

