

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/проф. И.А.Танкиев/
от «27» февраля 2025г.

_____/Б.С. Кульбужев /
от «14» марта 2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.04 Действительный анализ

Направление подготовки

01.03.01 –МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас, 2025г

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины « Действительный анализ» являются:

- Освоение методов построения меры на множестве
- Изучение свойств измеримых множеств и измеримых функций.
- Изучение структуры множества суммируемых функций.
- Построение теории интеграла Лебега и изучение его свойств

Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
	В	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ	6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6

Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Модуль Б1.В.04 «Действительный анализ» относится к вариативной части цикла профессиональных дисциплин. Она является логическим продолжением базового курса математического анализа. Знания, полученные после изучения этой дисциплины, позволяют ориентироваться в различных направлениях практической деятельности, связанных с дискретной математикой, защитой информации, компьютерными науками. В качестве входных знаний необходимы основы математического анализа.

2. Результаты освоения дисциплины (модуля) Действительный анализ

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-3	Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-3.1: Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа ПК-3.2: Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа ПК-3.3: Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра			
		4			
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	3 з.е.				
Курсовой проект (работа)	не предусмотрено				
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	80	80			
Лекции	30	30			
Практические занятия, семинары	50	50			
Лабораторные работы					
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	28	28			
КСР					
Экзамен					
Общая трудоемкость дисциплины	108	108			

[illegible]

[illegible]

	Раздел 7. Абсолютно непрерывные функции точки. Функции, представимые в виде интеграла. Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.			8	14			2									
7.1	Абсолютно непрерывные функции точки. Функции, представимые в виде интеграла.			4	6												
7.2	Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.			4	8												
Общая трудоемкость, в часах		4	108	30	50	-	-	28	-		Промежуточная аттестация						
											Форма						
											Зачет						+
											Зачет с оценкой						-
											Экзамен						-

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

Раздел 1. Многомерное евклидово пространство. Замкнутые и открытые множества. Структура линейного открытого множества. Метрические пространства.

Тема 1.1. Введение в анализ. Многомерное евклидово пространство.

Тема 1.2. Замкнутые и открытые множества. Структура линейного открытого множества. Метрические пространства.

Раздел 2. Аддитивные функции множеств. Мера и ее свойства. Внешняя мера. Распространение меры с кольца на алгебру.

Тема 2.1. Аддитивные функции множеств. Мера и ее свойства. Внешняя мера. Распространение меры с кольца на алгебру.

Раздел 3. n -мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда. Полукольцо ячеек. Представление открытого множества с помощью ячеек. Измеримые множества.

Тема 3.1. n -мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда. Полукольцо ячеек.

Тема 3.2. Представление открытого множества с помощью ячеек. Измеримые множества.

Раздел 4. Определение измеримых функций. Арифметические операции над измеримыми функциями. Предельный переход в классе измеримых функций. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.

Тема 4.1. Определение измеримых функций. Арифметические операции над измеримыми функциями.

Тема 4.2. Предельный переход в классе измеримых функций. Эквивалентные функции.

Тема 4.3. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.

Раздел 5. Определение интеграла Лебега. Простейшие свойства интеграла. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство измеримых функций.

Тема 5.1. Определение интеграла Лебега. Простейшие свойства интеграла.

Тема 5.2. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство измеримых функций.

Раздел 6. Определение суммируемой функции. Распространение простейших свойств интеграла. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство суммируемых функций. Геометрический смысл интеграла Лебега.

Тема 6.1. Определение суммируемой функции. Распространение простейших свойств интеграла.

Тема 6.2. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство суммируемых функций.

Раздел 7. Абсолютно непрерывные функции точки. Функции, представимые в виде интеграла. Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.

Тема 7.1. Абсолютно непрерывные функции точки. Функции, представимые в виде интеграла.

Тема 7.2. Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.

Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)

Не предусмотрены учебным планом ООП

Примерная тематика курсовых работ

Не предусмотрены учебным планом ООП

5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
Раздел 1	Многомерное евклидово пространство. Замкнутые и открытые множества. Структура линейного открытого множества. Метрические пространства.		1
1.1	Введение в анализ. Многомерное евклидово пространство.	Аудиторная работа	
1.2	Замкнутые и открытые множества. Структура линейного открытого множества Метрические пространства.	Теоретический тест	
Раздел 2	Аддитивные функции множеств. Мера и ее свойства. Внешняя мера. Распространение меры с кольца на алгебру.		1
2.1	Аддитивные функции множеств. Мера и ее свойства. Внешняя мера. Распространение меры с кольца на алгебру.	Аудиторная работа	
Раздел 3	n-мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда. Полукольцо ячеек. Представление открытого множества с помощью ячеек. Измеримые множества.		1
3.1	n-мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда Полукольцо ячеек	Аудиторная работа	

3.2	Представление открытого множества с помощью ячеек. Измеримые множества.	Аудиторная работа	
Раздел 4	Определение измеримых функций. Арифметические операции над измеримыми функциями. Предельный переход в классе измеримых функций. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.		1
4.1	Определение измеримых функций. Арифметические операции над измеримыми функциями.	Аудиторная работа	
4.2	Предельный переход в классе измеримых функций. Эквивалентные функции.	Аудиторная работа	
4.3	Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.	Контрольная работа	
Раздел 5	Определение интеграла Лебега. Простейшие свойства интеграла. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство измеримых функций.		2
5.1	Определение интеграла Лебега. Простейшие свойства интеграла.	Аудиторная работа	
5.2	Предельный переход под знаком интеграла. Пространство измеримых функций.		
Раздел 6	Определение суммируемой функции. Распространение простейших свойств интеграла. Предельный переход под знаком интеграла. Пространство суммируемых функций. Геометрический смысл интеграла Лебега.		2
6.1	Определение суммируемой функции. Распространение	Аудиторная работа	

	простейших свойств интеграла.		
6.2	Предельный переход под знаком интеграла. Пространство суммируемых функций.	Контрольная работа	
Раздел 7	Абсолютно непрерывные функции. Функции, представимые в виде интеграла. Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.		2
7.1	Абсолютно непрерывные функции точки. Функции, представимые в виде интеграла.	Аудиторная работа	
7.2	Дифференцирование непрерывных монотонных функций. Дифференцирование разрывных монотонных функций.	Контрольная работа	

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Проведение **контрольных работ** по дисциплине предусмотрено ОПОП. Ниже даны примерные варианты контрольных работ.

1. Из 100 студентов 28 изучают испанский язык, 30-немецкий, 42-французский, 8-испанский и немецкий, 10-испанский и французский, 5-немецкий и французский, и три студента изучают все три языка. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только французский язык?
2. Показать, что если всякое отображение непустого множества P на P есть взаимно однозначное соответствие, то P – конечное множество.
3. Доказать, что мощность всех функций, непрерывных на $[a,b]$ имеет мощность c .
4. Показать, что мера открытого ограниченного множества равна его мере Лебега.
5. Показать, что если $f(x)$ измерима, то множество $\{x \mid f(x) = a\}$ измеримо при любом a .
6. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится на $[0,1]$ почти всюду к функции $f(x) = 0$. Проверить, что $\{x_n\}$ сходится к $f(x)$ и по мере.
7. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_a^b D(x)dx, \text{ где } D(x) - \text{функция Дирихле.}$$

8. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0,1]$.

Тестовые задания

Вариант 1.

1. Множества A и B называется равномощными, если:

а) существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : A \rightarrow B$

б) существует отображение $\psi : A \rightarrow B$

в) $A \subset B$ и $B \subset A$
если

2. Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность:

а) счетную,

б) c ,

в) 2^c .

3. Пространство $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ является:

а) полным

б) неполным

в) сепарабельным

4. Компактное подмножество A хаусдорфова пространства:

а)

хаусдорфово,

б) замкнуто,

в) открыто.

5. Исключите свойство, не имеющее отношения к понятию меры на алгебре множеств:

а) $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(A) \geq 0$

б) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$

в) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых A, B принадлежащих заданной алгебре множеств.

Вариант 2

1. Мощность множества понимается как количество элементов множества, если:

а) множество конечно,

б) множество счетно,

в) множество пусто

2. Какое из данных множеств не обладает мощностью гиперконтинуума:

а) множество всех функций, заданных на $[a, b]$,

б) множество \mathbb{R}^n ,

в) множество всех подмножеств плоскости ?

3. Пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ является:

а)

неполным

б) полным

в) сепарабельным

4. Внутренность множества A обозначается:

а) $O(A)$,

б) $\text{int } A$

в) $X \setminus A$

5. Мера Лебега канторовского множества равна:

1) 1

2) 0

3) не определена.

Вариант 3.

1. Известно, $A \subset B$, тогда что

а) $|A| < |B|$

б) $|A| \neq |B|$

в) $|A| = |B|$

г) нет верного ответа.

2. Какое из приведенных свойств не является аксиомой метрики:

1) $\rho(x, x) = 0$

2) $\rho(x, y) = -\rho(y, x)$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(y, x) = \rho(x, z)$?

3. Какое из приведенных пространств не является полным:

а) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$

б) пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$

в) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$?

4. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ на R со стандартной топологией

а) открыто,

б) не открыто,

в) замкнуто,

г) не замкнуто.

5. Алгебра всегда является:

а) кольцом,

б)

полукольцом,

в) σ -

алгеброй.

| | | |

Вариант 4.

1. Если $A \subset B \subset C$ и $A = C$, то
и

а) $|A| = |B|$

б) $|A| = |B| = |C|$

в) $|A| \neq |B|$

2. Какое из приведенных ниже пространств не является метрическим:

а) $C[0, 1]$,

б) R ,

в) L_p

г) нет верного ответа?

3. Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$ (1) $f(x) = 0$ в любой точке

$x \in [a, b]$ (2), тогда:

а) $(1) \Rightarrow (2)$

б) $(2) \Rightarrow (1)$

в) $(1) \Rightarrow (2)$

4. Пусть Q - множество рациональных точек на R , тогда:

а) Q - компактно,

б) Q - не компактно,

в) $R \setminus Q$ - компактно.

5. Пространство $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$

а)

сепарабельно,

б) неполное

в) содержит только непрерывные функции

Вопросы к зачету.

1. Многомерное евклидово пространство.
2. Замкнутые и открытые множества.
3. Структура линейного открытого множества.
4. Метрические пространства.
5. Аддитивные функции множеств.
6. Мера и ее свойства.
7. Внешняя мера.
8. Распространение меры с кольца на алгебру
9. n -мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда.
10. Полукольцо ячеек. Представление открытого множества с помощью ячеек.
11. Измеримые множества.
12. Определение измеримых функций.

13. Арифметические операции над измеримыми функциями.

14. Предельный переход в классе измеримых функций.
15. Эквивалентные функции.
16. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере.
17. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.
18. Определение интеграла Лебега.
19. Простейшие свойства интеграла.
20. Предельный переход под знаком интеграла.
21. Пространство измеримых функций.
22. Определение суммируемой функции.
23. Распространение простейших свойств интеграла.
24. Предельный переход под знаком интеграла.
25. Пространство суммируемых функций.
26. Геометрический смысл интеграла Лебега.
27. Абсолютно непрерывные функции точки.
28. Функции, представимые в виде интеграла.
29. Дифференцирование непрерывных монотонных функций
30. Дифференцирование разрывных монотонных функций

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр. работа (проверка и оценка)	Раздел 1- Раздел 7	УК-6, ПК-3
2	Теоретический тест	Раздел 1	УК-6, ПК-3
3	Самостоятельное решение практических	Раздел 1- Раздел 7	УК-6, ПК-3

	заданий (аудиторная)		
5	зачёт в 4 семестре	Раздел 1 - Раздел 7	УК-6, ПК-3

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) действительный анализ

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) действительный анализ.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющихся в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

7.1. Учебная литература: Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.:Наука, 1989, - 623 с.

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука,1979.

2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука,1979.

3. Антонец А.Б., Радыно Я.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Изд-во «Университетское», 1984, - 352 с.

Дополнительная литература:

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984, - 752 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975, - 443 с.
3. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 1995. – 224 с.
4. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966;
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967;
6. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1-3, М., 1962-74; Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ. Теория и приложения пер с англ., М., 1969.
7. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболев Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2005.
8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979, 1988.

7.2. Интернет-ресурсы

1. <http://window.edu.ru/window/library>
2. <http://math.ru/lib/3>

7.3. Программное обеспечение:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

7.4. Материально-техническое обеспечение

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала (специализированное демонстрационное оборудование):

1. Доска и мел (или более современные аналогии)
2. компьютерные и мультимедийные технологии
3. микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов)

Рабочая программа по дисциплине «**Действительный анализ**» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования бакалавриат), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика" (с изменениями и дополнениями) (Редакция с изменениями N 1456 от 26.11.2020, С изменениями и дополнениями от: 26 ноября 2020 г., 8 февраля 2021 г.), с учетом профессионального стандарта 01 Образование и наука, утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «5» августа 2021 г. № 30550

Программу составил:

Доцент кафедры «Математический анализ» Албогачиева М.М.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ» Протокол № 6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета протокол № 7 от «13» марта 2024 г.

Приложение №1

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица 1.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-3	Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-3.1: Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа ПК-3.2: Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа ПК-3.3: Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
освоения)				
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся

		недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные
		ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии

Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы
Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

- Из 100 студентов 28 изучают испанский язык, 30-немецкий, 42-французский, 8-испанский и немецкий, 10-испанский и французский, 5-немецкий и французский, и три студента изучают все три языка. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только французский язык?
- Показать, что если всякое отображение непустого множества P на P есть взаимно однозначное соответствие, то P – конечное множество.
- Доказать, что мощность всех функций, непрерывных на $[a,b]$ имеет мощность c .
- Показать, что мера открытого ограниченного множества равна его мере Лебега.
- Показать, что если $f(x)$ измерима, то множество $\{x \mid f(x) = a\}$ измеримо при любом a .
- Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится на $[0,1]$ почти всюду к функции $f(x) = 0$. Проверить, что $\{x_n\}$ сходится к $f(x)$ и по мере.
- Вычислить интеграл Лебега
$$\int_a^b D(x)dx$$
, где $D(x)$ - функция Дирихле.
- Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0,1]$.

является:

1. Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность:

а

)

с

ч

е

т

н

у

ю

,

б

)

с

,

в) 2^c .

2. Пространство $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$

а) полным

б) неполным

в) сепарабельным

3. Компактное подмножество A хаусдорфова пространства:

а)

хаусдорфово,

б) замкнуто,

в) открыто.

4. Исключите свойство, не имеющее отношения к понятию меры на алгебре множеств:

а) $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(A) \geq 0$

б) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), A_n \cap A_m = \emptyset \text{ при } n \neq m$

в) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых A, B принадлежащих заданной алгебре множеств.

Вариант 2

1. Мощность множества понимается как количество элементов множества, если:

а) множество

конечно, б)

множество счетно,

в) множество пусто

2. Какое из данных множеств не обладает мощностью гиперконтинуума:

а) множество всех функций, заданных на

$[a, b]$, б) множество $|R^n$,

в) множество всех подмножеств плоскости ?

3. Пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ является:

а)

неполным

б) полным

в) сепарабельным

4. Внутренность множества A обозначается:

а) $O(A)$,

б) $\text{int } A$

в) $X \setminus A$

5. Мера Лебега канторовского множества равна:

1) 1

2) 0

3) не определена.

Вариант 3.

1. Известно, $A \subset B$, тогда что

а) $|A| < |B|$

б) $|A| \neq |B|$

в) $|A| = |B|$

г) нет верного ответа.

2. Какое из приведенных свойств не является аксиомой метрики:

1) $\rho(x, x) = 0$

2) $\rho(x, y) = -\rho(y, x)$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(y, x) = \rho(x, z)$?

3. Какое из приведенных пространств не является

полным: а) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$

б) пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$

в) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|$

$$f(x) - g(x) dx ?$$

4. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ **на** R **со стандартной топологией**
о

- а) открыто,
- б) не открыто,
- в) замкнуто,
- г) не замкнуто.

5. Алгебра всегда является:

- а) кольцом,
- б) полукольцом,
- в) σ -алгеброй.

Вариант 4.

1. Если $A \subset B \subset C$ и $A = C$, то

- а) $|A| = |B|$
- б) $|A| = |B| = |C|$
- в) $|A| \neq |B|$

2. Какое из приведенных ниже пространств не является

метрическим: а) $C[0,1]$,

б) R ,

в) L_p

г) нет верного ответа?

3. Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad (1) \quad f(x) = 0 \text{ в любой точке } x \in [a,b] \quad (2)$$

тогда:

а) $(1) \Rightarrow (2)$

б) $(2) \Rightarrow (1)$

в) $(1) \Rightarrow (2)$

4. Пусть Q - множество рациональных точек на R ,

тогда: а) Q - компактно,

б) Q - не компактно,

в) $R \setminus Q$ - компактно.

5. Пространство $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$

а)

сепарабельно,

б) неполное

в) содержит только непрерывные функции

Вопросы к зачету.

1. Многомерное евклидово пространство.
2. Замкнутые и открытые множества.
3. Структура линейного открытого множества.
4. Метрические пространства.
5. Аддитивные функции множеств.
6. Мера и ее свойства.
7. Внешняя мера.
8. Распространение меры с кольца на алгебру
9. n -мерные параллелепипеды. Объем параллелепипеда.
10. Полукольцо ячеек. Представление открытого множества с помощью ячеек.
11. Измеримые множества.
12. Определение измеримых функций.
13. Арифметические операции над измеримыми функциями.
14. Предельный переход в классе измеримых функций.
15. Эквивалентные функции.
16. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере.
17. Теоремы Лузина, Егорова и Фреше.
18. Определение интеграла Лебега.
19. Простейшие свойства интеграла.
20. Предельный переход под знаком интеграла.
21. Пространство измеримых функций.
22. Определение суммируемой функции.

- 23. Распространение простейших свойств интеграла.
- 24. Предельный переход под знаком интеграла.
- 25. Пространство суммируемых функций.
- 26. Геометрический смысл интеграла Лебега.
- 27. Абсолютно непрерывные функции точки.
- 28. Функции, представимые в виде интеграла.
- 29. Дифференцирование непрерывных монотонных функций
- 30. Дифференцирование разрывных монотонных функций

Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой

