

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/проф. И.А.Танкиев
от «27» февраля 2025г.

_____/Б.С. Кульбужев
от «14» марта 2025г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.21 Дополнительные главы линейной алгебры**

Направление подготовки

01.03.01 –МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас, 2025г

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы линейной алгебры» являются формирование у обучающихся комплекса теоретических знаний, охватывающих дополнительные разделы линейной алгебры, а также приобретение ими умений оперировать понятиями и методами дисциплины, и овладение навыками использования методов линейной алгебры в дальнейшей профессиональной деятельности. Подготовка к восприятию многомерных векторных и евклидовых пространств.

Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
	В	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ	6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Дополнительные главы линейной алгебры» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной

образовательной программы высшего образования - программы бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика очной формы обучения.

При изучении дисциплины «Дополнительные главы линейной алгебры» используются знания, приобретенные при изучении «Линейной алгебры» (системы линейных алгебраических уравнений, собственные значения и собственные векторы матриц), «Математического анализа», «Алгебры», «Векторной алгебры», «Аналитической геометрии», которые обязательны для углублённого изучения данной дисциплины.

Дисциплина «Дополнительные главы линейной алгебры» заполнит пробел, который существует между общим курсом линейной алгебры и приложением этой дисциплины к научным и техническим задачам.

Основные положения дисциплины могут быть использованы при изучении следующих дисциплин:

- Вычислительная математика;
- Численные методы;
- Дифференциальные уравнения;
- Функциональный анализ;

3. Результаты освоения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы линейной алгебры».

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции
ОПК-3	Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	Знает: Основные направления и проблематику современной математики Умеет: Решать исследовательские математические задачи на основе конструирования новых или реконструкции уже известных способов и приемов Владеет: Методами математических исследований
	Способен строго	Знает: Утверждения, а также
		Знает утверждения, находящиеся в широком

Способен строго док

ПК-		находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа Умеет: Пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа Владеет: Методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода
-----	--	--

4. Структура и содержание дисциплины (модуля) «Дополнительные главы линейной алгебры

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 9 зачетных единиц, 324 часов.

Объем дисциплины и виды учебной работы

	Всего	Порядковый номер семестра	
		7	8
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	396 (10 з.е.)	144	252
Курсовой проект (работа)	Не предусмотрено		
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	126		
Лекции	64	30	34
Практические занятия, семинары	60	28	32
Лабораторные работы	Не предусмотрено		
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	216	59	159
Вид итоговой аттестации:			экзамен

Экзамен			+27
---------	--	--	-----

[illegible]

[illegible]

	преобразования в жордановом базисе. Теорема Жордана.															
7.3.	Определение, свойства функций от матриц.	8		2	4											
7.4.	Способы нахождения функций от матриц.	8		2	4											
8.	Раздел 8. Введение в численные методы.	8	16	6	10											
8.1	Основные положения .Нормы матриц.	8		2	4											
8.2	Прямые решения систем линейных алгебраических уравнений. Численные схемы реализации метода Гаусса.			2												
8.3	Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.	8		2	4											
	Общая трудоемкость, в часах		396	34	60	216						Экзамен				

4.2. Содержание дисциплины (модуля) «Дополнительные главы линейной алгебры»

Раздел 1. Алгебраические структуры

Законы композиции. Ассоциативность, коммутативность.

Понятие алгебраической структуры. Группа, кольцо, поле, линейное пространство, алгебра.

Отношение эквивалентности. Фактор-структуры. Матрицы и основные действия с ними.

Специальные виды матриц. Линейная зависимость векторов. Полнота системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств.

Подпространства линейного пространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств, дополнение подпространства. Линейные многообразия.

Раздел 2. Линейные алгебраические системы уравнений

Классификация систем линейных уравнений. Определенные и неопределенные системы, однородные и неоднородные системы, совместные и несовместные. Геометрическое исследование систем. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли. Альтернатива Фредгольма. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Однородные системы. Фундаментальная система решений линейной однородной системы.

Раздел 3. Полилинейные формы. Определители

Отображения. Линейные формы. Сопряженные базисы.

Сопряженное пространство. Тензор полилинейной формы. Линейное пространство форм одинаковой

валентности. Произведение полилинейных форм.

Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Симметричные и антисимметричные формы. Определители и их основные свойства. Вычисление определителей 2-го, 3-го порядков. Вычисление определителя n -го порядка, используя свойства определителей.

Критерий линейной независимости набора векторов. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Определение ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Раздел 4. Линейные операторы. Алгебра операторов и матриц.

Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция, гомоморфизм, автоморфизм. Линейные операторы и их матричная запись. Арифметические действия с операторами и матрицами. Линейное пространство операторов и матриц. .

Изоморфизм алгебр. Алгебра операторов и матриц. Коммутатор матриц. Обратная матрица. Критерий обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы. Обратный оператор. Ядро и образ оператора. Критерий обратимости линейного оператора. Функции матриц и операторов.

Раздел 5. Тензорная алгебра.

Преобразование координат векторов линейного пространства и сопряженного пространства при замене базиса. Матрица перехода к новому базису. Ковариантный и контравариантный законы преобразования. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

Тензоры: тензор полилинейной формы, независимое от полилинейной формы определение тензора. Ковариантный и контравариантный тензоры. Многомерные матрицы. Арифметические операции с тензорами. Пространство тензоров. Тензорное произведение. Транспонирование и свертка тензоров. Полная свертка.

Раздел 6. Евклидово пространство. Ортогональность.

Метрические, нормированные и евклидовы пространства. Скалярное произведение. Матрица Грама. Вещественное евклидово и псевдоевклидово пространство. Основные неравенства. Комплексное евклидово пространство. Основные неравенства. Ортогональность векторов. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональная сумма подпространств. Ортогональный проектор. Задача о перпендикуляре. Линейные формы в евклидовом пространстве.

Раздел 7. Теорема Жордана . Функции от матриц.

Делимость многочленов. Многочлены от преобразований. Виды матрицы нильпотентного преобразования в жордановом базисе. Теорема Жордана. Применение многочленов от матриц для решения систем линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами. Определение, свойства функций от матриц. Способы нахождения функций от матриц. Вычисление функций от матриц через многочлены Лагранжа-Сильвестра. Применение функций от матриц для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Раздел 8. Введение в численные методы.

Основные положения. Нормы матриц. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Численные схемы реализации метода Гаусса. Метод прогонки. Метод LU -разложения. Выбор главного элемента. Разложение на ортогональный и треугольный множители. Метод квадратных корней. Проблема собственных значений. Оценки собственных значений. Методы вычисления характеристического многочлена, собственных значений и собственных векторов. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

5. Образовательные технологии

Используется лекционная форма в сочетании с самостоятельной работой студентов. В качестве заданий для самостоятельной работы студенты получают задачи для численного решения с использованием любого удобного программного обеспечения. В ходе решения этих задач студенты на практике проверяют теоретическую информацию, полученную на лекциях.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1	2	3	4	5	6
		Семестр 7			12
		Раздел 1. Алгебраические структуры			
1	1.1.Понятие алгебраической структуры. Матрицы и основные действия с ними.	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; • решение задач и упражнений; 	Выполнение текущего и типового домашних заданий с использованием конспектов лекций и практических занятий и рекомендованных учебных пособий..	ОЛ[1]: ОЛ[2] №797 § 10,12,стр 112	2
2	1.2.Изоморфизм линейных пространств. Подпространства линейного пространства.	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; • решение задач и упражнений; 	Просмотр конспектов предыдущих лекций и учебных пособий по пройденным темам. Фиксирование непонятных моментов.	ОЛ[1]: ОЛ[2] №1286, §16	4
		Раздел 2. Линейные алгебраические системы уравнений			
3	2.1.Классификация систем линейных уравнений. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли.	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; изучение основных понятий и определений темы: • решение задач и упражнений; • стандарт: решение систем линейных уравнений методом Крамера; • вариативные:геометрическое исследование систем. 	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу.	ОЛ[1]: 5.1,5.2, ОЛ[2] № 5.2 (а-г) , №5.4(а)	2

4-5	2.2.Альтернатива	Подготовка к аудиторному занятию:	Просмотр конспектов	ОЛ: [1]	4
-----	------------------	-----------------------------------	---------------------	---------	---

	ва Фредгольма. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Однородные системы.	занятию: • работа с теоретическим материалом; стандарт: фундаментальная система решений линейной однородной системы. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. вариативные: решение систем линейных уравнений с параметром.	предыдущих лекций и учебных пособий по пройденным темам. Фиксирование непонятных моментов.	5.-5.6., ОЛ [2] ГЛ.1 №1.6.1,5. 5.пр.5.4 №5.2 (а,б),№5. 3(в,г)	
--	--	--	--	--	--

		Раздел 3 .Полилинейные формы.Определители			
--	--	--	--	--	--

6-7	3.1. Отображения. Линейные формы. Сопряженные базисы.Сопряженное пространство.	Подготовка к аудиторному занятию: • работа с теоретическим материалом; изучение основных определений определение отображения, определители n – го порядка, их свойства. • решение задач и упражнений; стандарт: критерий линейной независимости набора векторов. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.	Выполнение текущего и типового домашних заданий с использованием конспектов лекций и практических занятий и рекомендованных учебных пособий.	ДЛ[10]: 9.6.2- 9.6.3	4
8	3.2Тензор полилинейной формы. Произведение полилинейных форм.	Подготовка к аудиторному занятию: • работа с теоретическим материалом; основные определения , операция произведения полилинейных форм	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу.	ОЛ[2] § 24,26 №1900,1 902	4
9	3.3.Определители и их	Подготовка к аудиторному занятию:	Просмотр лекционных	ОЛ[1]Гл. 2,2.2,2.3	4

	основные свойства. Вычисление определителя n -го	<ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; изучение основных определений: определение отображения, определители n – 	конспектов и конспектов практических занятий. Повторение основных определений и методов.	ОЛ[2] § 3-5, № 108, 111, 122, 200, 23	
10	<p>порядка, используя свойства определителей</p> <p>3.4. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.</p>	<p>того порядка, их свойства</p> <ul style="list-style-type: none"> • решение упражнений <p>стандарт: вычисление определителя n – о порядка различными способами;</p> <p>Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; изучение основных методов нахождения ранга матрицы • решение задач и упражнений; <p>стандарт: критерий линейной независимости набора векторов. Теорема о базисном миноре.</p> <ul style="list-style-type: none"> • подготовка к контрольной работе. <p>Раздел 4 . Линейные операторы. Алгебра операторов и матриц.</p>	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу. Фиксирование непонятных моментов для разъяснения на консультации.	8,240 ОЛ[2] § 10. № 608, 610	2
11-12	4.1. Линейные операторы и их матричная запись. Линейное пространство операторов и матриц.	<p>Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом; определение линейного оператора, линейного пространства, разбор доказательств простейших свойств векторных пространств • решение задач и упражнений 	Повторение материала прошлых лекций. Ознакомление с материалом предстоящей лекции.	ОЛ[2] § 1, ДЛ[10]: Гл. 9 п. 9.2 стр. 471	4
13	4.2. Обратная	Подготовка к аудиторному		ОЛ [2]	4

	матрица. Критерий обратимости матрицы. Вычисление обратной	занятию: • работа с теоретическим материалом; изучение теоретического материала по	Выполнение текущего и типового домашних заданий с использованием конспектов лекций и практических занятий и рекомендованных учебных пособий.	Гл.4,п.4. 1-4.5 № 4.1стр.18 2	
14- 15	матрицы. 4.3. Ядро и образ оператора. Критерий обратимости линейного оператора. Функции матриц и операторов.	теме. • решение задач и упражнений стандарт: выполнение условия обратимости матрицы вариативные: вычисление обратной матрицы Подготовка к аудиторному занятию: • работа с теоретическим материалом; изучение понятия ядра и образа оператора • решение задач и упражнений; стандарт:понятие многочлена от оператора,функции от матриц вариативные: вычисление многочлена от матрицы Раздел 5. Тензорная алгебра.	Просмотр конспектов предыдущих лекций и учебных пособий по пройденным темам. Фиксирование непонятных моментов.	ОЛ [2] Гл. 9.п.9.1.5, 9.1.4	2
16- 17	5.1	Преобразование координат векторов линейного пространства и сопряженного пространства при замене базиса. Матрица перехода к новому базису.			

18	5.2	Тензоры: тензо р полилинейной формы , независимое о т полилинейной форм ы определение тензора. Раздел 6. Евклидово пространство.			
1-2	6.1. Ортогональн ость векторов. Ортогональн ый базис. Процесс ортогонализа ции Грама- Шмидта.	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none">• работа с теоретическим материалом: изучение основных определений темы, ортогональный и ортонормированный базис• решение задач и	Просмотр лекционных конспектов и конспектов практических занятий. Повторение основных определений, теорем и методов.	ОЛ [2] Гл. 8 .8.8.1- 8.86.Пр. №8.17, 8.18	12
3-5	6.2. Задача о перпендикул яре. Ортогональн ые системы векторов: коэффициент ы Фурье, неравенства Бесселя и Парсеваля.	упражнений: <ul style="list-style-type: none">• подготовка к контрольной работе. Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none">• работа с теоретическим материалом: работа по усвоению основных определений ортогональных систем векторов• решение задач и упражнений :рассмотреть задачу о перпендикуляре, линейные формы в линейном пространстве Семестр 8 Раздел 7. Теорема Жордана .	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу. Фиксирование непонятных моментов для разъяснения на консультации.	ОЛ[1]Гл 14 7. П. 7.1.1- 7.1.4	

6-7	7.1. Делимость многочленов. Многочлены от преобразований.	<p>Функции от матриц</p> <p>. Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом: <p>работа с основными определениями темы: делимость многочленов</p>	Повторение материала прошлых лекций. Ознакомление с материалом предстоящей лекции	ОЛ[1] § 2.п.1(53), п. 2(57)	14
	8 7.2. Виды матрицы нильпотентного преобразования в жордановом базисе. Теорема Жордана.	<p>. Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом: <p>работа с основными определениями темы: теорема Жордана</p>	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу	ОЛ[1] § 2.п.4(61), п. 3(59)	18
	9-10 7.3. Определение, свойства функций от матриц.	<p>. Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом: 	Повторение материала прошлых лекций. Ознакомление с материалом предстоящей лекции	ОЛ[1] §3. п.1(77),п. 6(88)	12
11-12	7.4. Способы нахождения функций от матриц.	<p>работа с основными определениями темы: функции от матриц</p> <p>Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> • работа с теоретическим материалом: способы нахождения функций от матриц. Вычисление функций от матриц через многочлены Лагранжа- Сильвестра. <p>Раздел 8. Введение в численные методы.</p>	Просмотр конспектов лекций по пройденным темам. Фиксирование непонятных моментов.	ОЛ[1] §3. п.7(90),п. 6(88)	
13-	8.1. Основные	Подготовка к аудиторному	Повторение и	ОЛ[1]	10

14	положения .Нормы матриц.	занятию: • работа с теоретическим материалом:основные положения, определение нормы матриц	закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу.	Гл.3 §1,2. п.1 - 4(77), 3-4,стр 122	
15- 16	8.2. Прямые решения систем линейных уравнений. Численные схемы реализации метода Гаусса.	Подготовка к аудиторному занятию: • работа с теоретическим материалом: работа с основными определениями темы	Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу.	ОЛ[1] Гл.3 §3. п.1 - (134), 29138),ст р 122	12
17- 18	8.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраически х уравнений.	. Подготовка к аудиторному занятию: • работа с теоретическим материалом: работа с основными определениями темы	Фиксирование непонятных моментов для разъяснения на консультации. Повторение и закрепление теоретического и практического материала, используя конспект лекций и рекомендованную литературу.	ОЛ[1] Гл.3 §4. п.2 Стр 160	13

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удастся осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических заданий оцениваются в баллах, в соответствии с

Вид работ	Методические рекомендации
Лекции	Вести конспект лекций. Лекции ведутся в отдельной общей тетради, рекомендуется оставлять место для заметок, например в виде полей. Знание основного материала предыдущих лекций, включая знание основных определений и ключевых теорем. Рекомендуется выделять в тексте ключевые слова, определения, леммы и теоремы.
Практ. занятия	В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, лекции. Внимательно слушать и конспектировать базовые примеры, разбираемые преподавателем. Задавать уточняющие вопросы в ходе решения базовых задач преподавателем. При решении домашних заданий периодически возвращаться к разобранным на практических занятиях задачах. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

Самост. работа	Самостоятельная работа ведется в той же тетради, что и практические занятия. Самостоятельная работа - это отдельный блок который выделяется заголовком, например, "Домашние задание". Рекомендуется прорабатывать материал непосредственно после практический занятий. При решение задач и примеров рекомендуется их выполнение по образцу из практического занятия. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы
Подготовка к экзамену	Подготовка к экзамену или зачету ведется на основе курса лекций или рекомендованной литературы. Необходимо знание и понимание всех понятий, определений, утверждений, лемм и теорем. Необходимо умение формулировать теоремы в форме непротиворечивых логических конструкций. Желательно уметь строить и приводить примеры к соответствующим определениям и утверждениям. Необходимо знание доказательства теорем и остальных утверждений.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки

«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
--------------	--

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр. работа (проверка и оценка)	Раздел 1- Раздел 2 Раздел 3- Раздел 4	ОПК-3, ПК-3
2	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Раздел 1-Раздел 2 Раздел 3- Раздел 4 Раздел 5- Раздел 6 Раздел 7- Раздел 8	ОПК-3, ПК-3

3	Экзамен во втором семестре	Раздел 2- Раздел 8	ОПК-3, ПК -3
---	----------------------------	--------------------	--------------

Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации

Вопросы и задания для контроля работы студентов по дисциплине «Дополнительные главы линейной алгебры»

Вопросы к экзамену

1. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.
3. Пространство линейных операторов.
4. нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка.
5. Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.
6. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.
7. Приведение эрмитовой матрицы к диагональному виду унитарным преобразованием.
8. Минимальный полином и инвариантные подпространства. Спектральная теорема для линейного оператора произвольного вида.
9. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
10. Ультраинвариантные подпространства.
11. Унитарный и ортогональный операторы: основные определения и свойства.
12. Эрмитов и самосопряженный операторы в евклидовом пространстве: спектральная теорема, минимальное свойство.
13. Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.
14. Преобразование матрицы линейного оператора A при замене базиса. Преобразование подобия
15. Разложение линейного пространства в сумму подпространств. 2-я теорема о ядре и образе. Теорема о проекторах.
16. Ортогональные системы векторов: коэффициенты Фурье, неравенства Бесселя и Парсеваля
17. Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.
18. Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана (обзор).
19. Задача о перпендикуляре.
20. Жорданова форма матрицы линейного оператора.
21. Ортогональность. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
22. Комплексное евклидово пространство. Основные неравенства.
23. Вещественное евклидово и псевдоевклидово пространство. Основные неравенства.
24. Квадратичные формы: закон инерции квадратичной формы.
25. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.
26. Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.
27. Базис и размерность линейного пространства.
28. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
29. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
30. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
31. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.
32. Изоморфизм линейных пространств.

33. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
34. Жорданова форма матрицы линейного оператора.
35. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости
36. Произведение полилинейных форм и его свойства.
37. Неравенство Коши-Буняковского
38. Прямые методы решения систем линейных уравнений. LU - разложение. Выбор главного элемента.
39. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Разложение на ортогональный и треугольный множители.
40. Прямые методы решения систем линейных уравнений.

Практические задания

Вариант 1

Задание 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найти собственные числа и собственные векторы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание 3.

Вычислить определитель четвертого порядка: а) разложением по элементам
ряда;

б) сведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Задание 4

В некотором базисе линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

В действительном линейном пространстве найти базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 5

Привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Написать матрицу квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Задание 7

Найти e^A , Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 8

В \mathbb{R}^2 вектор $\mathbf{x} = 2\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ к базису $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Найти разложение \mathbf{x} в базисе $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

Задание 9

Составить матрицу A и определить ранг квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 \cdot x_2 - 2x_2 \cdot x_3 + 3x_3^2$.

Задание 9

Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

Задание 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Вычислить определитель четвертого порядка: а) разложением по элементам ряда;

б) сведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Задание 4

Найти матрицу T ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

, которая приводит матрицу

к диагональному виду.

Задание 5

Дана квадратичная форма

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 - 5x_3^2$$

Записать ее в матричном виде.

Задание 6

В \mathbb{R}^3 заданы два базиса: $\mathbf{g}_1 = (-2; 1; 2), \mathbf{g}_2 = (0; 3; 0), \mathbf{g}_3 = (0; 0; 2)$ и $\mathbf{f}_1 = (0; 1; -1), \mathbf{f}_2 = (2; 0; 0), \mathbf{f}_3 = (0; 1; 0)$. Найти матрицу C перехода от базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Координаты базисных векторов заданы в ОНБ $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Задание 7

В \mathbb{R}^3 вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ задан в базисе $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$. Найти координаты \mathbf{x} в базисе $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, если

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

задана матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}$ к базису $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}$.

Задание 8

Линейный оператор $A[\cdot]$ задан в базисе $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу \bar{A} этого оператора в базисе $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, если $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$, $\mathbf{f}_2 = 3\mathbf{g}_2$.

Задание 9

Найти e^A , Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 10

Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН (ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ)

Экзаменационный билет № 1

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

Экзаменационный билет № 2

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство полноты.

Экзаменационный билет № 3

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 4

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Экзаменационный билет №5

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

Экзаменационный билет № 6

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 7

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 8

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Критерий линейной зависимости набора векторов.

Экзаменационный билет № 9

1. Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.
2. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

Экзаменационный билет № 10

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 11

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство полноты.

Экзаменационный билет № 12

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Экзаменационный билет № 13

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 14

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 15

1. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Экзаменационный билет № 16

1. Алгебра операторов и матриц.
2. Нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка. 2.

Экзаменационный билет № 17

1. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
2. Ультраинвариантные подпространства.

Экзаменационный билет № 18

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Экзаменационный билет № 19

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 20

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p,q) .

Экзаменационный билет № 21

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 22

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).

Экзаменационный билет № 23

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).

Экзаменационный билет № 24

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 25

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Экзаменационный билет № 26

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Критерий линейной зависимости набора векторов.

Экзаменационный билет № 27

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Экзаменационный билет № 28

1. Поле комплексных чисел.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 29

1. Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 30

1. Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле.
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 31

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство полноты.

Экзаменационный билет № 32

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Экзаменационный билет № 33

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p, q) .

Экзаменационный билет № 34

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 35

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.
2. Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Экзаменационный билет № 36

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 37

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Экзаменационный билет № 38

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 39

1. Преобразование матрицы линейного оператора A при замене базиса. Преобразование подобия.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Экзаменационный билет № 40

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Оценка	Минимальное количество баллов	Максимальное количество баллов
«5» (отлично)	90	100
«4» (хорошо)	74	90
«3» (удовлетворительно)	60	74
«2» (неудовлетворительно)	0	60

Знания, умения и навыки обучающихся при промежуточной аттестации **в форме экзамена** определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

«Отлично» – обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

«Хорошо» – обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

«Удовлетворительно» – обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

«Неудовлетворительно» – обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) «Дополнительные главы линейной алгебры»

7.1. Учебная литература:

Основная литература

1. Беклемишев Д.В., Дополнительные главы линейной алгебры, СПб, изд. Лань, 2008
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука.1984.

дополнительная литература:

- Бугров Л. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., “Наука”, 1980.
- Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., “Наука”, 1980.
- Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. . – М.:Наука.1981.
- Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972.
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: 2006.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. . – М.: 2006.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: 2006.
- Самарский А.А., Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер.-СПб.: Издательство “Лань”, 2005г.
- Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. Москва «Высшая школа» 2005

7.2. Интернет-ресурсы

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	На сайте размещены электронные учебники, справочники, статьи, примерами применения математических пакетов в образовательном процессе, демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
2.	Math.ru	www.math.ru	Математический сайт для школьников, студентов, учителей и всех, кто интересуется математикой.

3.	Математика	www.mathematics.ru	Учебный материал по различным разделам математики.
4.	Математика для студентов и прочее.	www.xplusy.isnet.ru	Содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.
5.	Российское образование.	www.edu.ru	Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.

7.3. Программное обеспечение

1. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с.
(<http://znanium.com/bookread2.php?book=544419>)
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкнига, 2007. – 432 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в 3 томах). – М.: МЦНМО. – 2009. (Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн», Режим доступа:

Том 1. Основы алгебры – 273 с: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63140
том 2. Линейная алгебра – 368 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63144
том 3. Основные структуры алгебры – 272 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=62951)

4. Смолин Ю. Н. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. — М. : ФЛИНТА : Наука, 2012. — 464 с. (<http://znanium.com/bookread2.php?book=456995>)

5. Ильин, В. А. Линейная алгебра [Текст] : [Учеб. для физ. спец. и спец. "Прикладная математика"] / В. А. Ильин ; Э.Г. Поздняк. - М. : Физматлит, 2010. - 278 с. (Электронный ресурс «Университетская библиотека онлайн», режим доступа:
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=68974)

6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Текст] : [Учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов] / И. В. Проскуряков. - 8-е изд. - М. : СПб. : Физматлит : Невский диалект : Лаборатория базовых знаний, 2001. - 382 с.

7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Текст] : [Учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов] / И. В. Проскуряков. - 8-е изд. - М. : СПб. : Физматлит : Невский диалект : Лаборатория базовых знаний, 1966. - 381 с.

(http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=464077).

8. Курош А. Г. Теория групп. М.: Физматлит, 2011 – 805 с. (Электронный ресурс «Университетская библиотека онлайн», режим доступа:
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=457669)

7.4. Материально-техническое

Для освоения данной дисциплины необходимы:

- мультимедийные средства обучения (компьютер и проектор, ресурсы Интернета);
- классическая доска;

Рабочая программа по дисциплине «**Дополнительные главы линейной алгебры**» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования **бакалавриат**), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика" (с изменениями и дополнениями).

Доцент кафедры «Математический анализ» Тумгоева Хадижат Абукаровна

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ» Протокол №

6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета протокол №

7 от «13» марта 2024 г.

Приложение №1

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица1.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции
ОПК-3	Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	Знает: Основные направления и проблематику современной математики Умеет: Решать исследовательские математические задачи на основе конструирования новых или реконструкции уже известных способов и приемов Владеет: Методами математических исследований
ПК-3	Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знает: Утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности, а также следствия и доказательства Умеет: Пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа Владеет: Методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их

формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории,

		недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы

Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

Оценивание ответа на зачете

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.

«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
--------------	--

Таблица 6.

Оценивание ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Вопросы и задания для контроля работы студентов по дисциплине «Дополнительные главы линейной алгебры»

Вопросы к экзамену

1. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.
3. Пространство линейных операторов.
4. нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка.
5. Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.
6. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.
7. Приведение эрмитовой матрицы к диагональному виду унитарным преобразованием.
8. Минимальный полином и инвариантные подпространства. Спектральная теорема для линейного оператора произвольного вида.
9. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
10. Ультраинвариантные подпространства.
11. Унитарный и ортогональный операторы: основные определения и свойства.
12. Эрмитов и самосопряженный операторы в евклидовом пространстве: спектральная теорема, минимальное свойство.
13. Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.
14. Преобразование матрицы линейного оператора A при замене базиса. Преобразование подобия
15. Разложение линейного пространства в сумму подпространств. 2-я теорема о ядре и образе. Теорема о проекторах.
16. Ортогональные системы векторов: коэффициенты Фурье, неравенства Бесселя и Парсеваля
17. Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.
18. Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана (обзор).
19. Задача о перпендикуляре.
20. Жорданова форма матрицы линейного оператора.
21. Ортогональность. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
22. Комплексное евклидово пространство. Основные неравенства.
23. Вещественное евклидово и псевдоевклидово пространство. Основные неравенства.
24. Квадратичные формы: закон инерции квадратичной формы.
25. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.
26. Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.
27. Базис и размерность линейного пространства.
28. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
29. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
30. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
31. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.
32. Изоморфизм линейных пространств.
33. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

34. Жорданова форма матрицы линейного оператора.
 35. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости
 36. Произведение полилинейных форм и его свойства.
 37. Неравенство Коши-Буняковского
 38. Прямые методы решения систем линейных уравнений. LU - разложение. Выбор главного элемента.
 39. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Разложение на ортогональный и треугольный множители.
 40. Прямые методы решения систем линейных уравнений.

Практические задания

1. Задана однородная система линейных уравнений. Требуется:

- а) доказать, что система имеет нетривиальное решение.
 б) найти базис пространства решений (фундаментальную систему решений)
 в) записать общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

2. В пространстве R^2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ заданы векторы

$$a = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2, \quad b = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2, \quad c = \gamma_1 \cdot e_1 + \gamma_2 \cdot e_2.$$

- Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;
 б) записать матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{a, b\}$;
 в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = 3e_1 - e_2, \quad b = e_1 - 2e_2, \quad c = 4e_1 - 3e_2.$$

3. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Записать форму преобразования координат.

$$-2x^2 - 2y^2 + 2xy + 3 = 0$$

4. Задана однородная система линейных уравнений. Требуется:

- а) доказать, что система имеет нетривиальное решение.
 б) найти базис пространства решений (фундаментальную систему решений)
 в) записать общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$7x_1 + x_3 = 0$$

5 В пространстве R^2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ заданы векторы

$$a = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2, \quad b = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2, \quad c = \gamma_1 \cdot e_1 + \gamma_2 \cdot e_2.$$

- Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;
 б) записать матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{a, b\}$;
 в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = 3\ell_1 + \ell_2, \quad b = \ell_1 + 2\ell_2, \quad c = 3\ell_1 - 4\ell_2.$$

$$A(4, 4, 10), \quad B(7, 10, 2), \quad C(2, 8, 4), \quad D(9, 6, 9).$$

5. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Записать форму преобразования координат.

$$7x^2 - 7y^2 + 2xy = 24$$

6. Задана однородная система линейных уравнений. Требуется:

- доказать, что система имеет нетривиальное решение.
- найти базис пространства решений (фундаментальную систему решений)
- записать общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$| \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 \\ \end{matrix} = 0$$

7. В пространстве R^2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ заданы векторы

$$a = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2, \quad b = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2, \quad c = \gamma_1 \cdot e_1 + \gamma_2 \cdot e_2.$$

Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{a, b\}$;

в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = e_1 + 3e_2, \quad b = 2e_1 + 4e_2, \quad c = -3e_1 + 5e_2.$$

8. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Записать форму преобразования координат.

$$5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 = 22$$

3. Задана однородная система линейных уравнений.

Требуется: а) доказать, что система имеет нетривиальное решение.

б) найти базис пространства решений (фундаментальную систему

решений) в) записать общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$| \begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 \\ \end{matrix} = 0$$

9. В пространстве R^2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ заданы векторы

$$a = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2, \quad b = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2, \quad c = \gamma_1 \cdot e_1 + \gamma_2 \cdot e_2.$$

Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису

$\{a, b\}$; в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = -\ell_1 - 2\ell_2, \quad b = 3\ell_1 + 2\ell_2, \quad c = -2\ell_1 - \ell_2.$$

10. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго

Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\ell_1, \ell_2\}$ к базису

$\{a, b\}$; в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = -2\ell_1 + 4\ell_2, \quad b = 2\ell_1 + \ell_2, \quad c = 4\ell_1 + 3\ell_2.$$

11. Задана однородная система линейных уравнений.

Требуется: а) доказать, что система имеет нетривиальное решение.

б) найти базис пространства решений (фундаментальную систему

решений) в) записать общее решение системы.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$| \begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \end{matrix} = 0$$

12. В пространстве R^2 в базисе $\{e_1, e_2\}$ заданы векторы

e_1, e_2

$$a = \lambda_1 \cdot \ell_1 + \lambda_2 \cdot \ell_2, \quad b = \beta_1 \cdot \ell_1 + \beta_2 \cdot \ell_2, \quad c = \gamma_1 \cdot \ell_1 + \gamma_2 \cdot \ell_2.$$

Требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\ell_1, \ell_2\}$ к базису

$\{a, b\}$; в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = 2\ell_1 - \ell_2, \quad b = 5\ell_1 + 4\ell_2, \quad c = 5\ell_1 + \ell_2.$$

13. а) доказать, что система имеет нетривиальное решение.

б) найти базис пространства решений (фундаментальную систему

решений) в) записать общее решение системы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$b = \beta_1 \cdot \ell_1 + \beta_2 \cdot \ell_2,$$

$$c = \gamma_1 \cdot \ell_1 + \gamma_2 \cdot \ell_2.$$

требуется: а) доказать, что векторы a и b образуют базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\ell_1, \ell_2\}$ к базису $\{a, b\}$;

в) найти координаты вектора c в базисе $\{a, b\}$.

$$a = 4\ell_1 + 3\ell_2,$$

$$b = 5\ell_1 + \ell_2,$$

$$c = 2\ell_1 + 2\ell_2.$$

УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН (ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ)

Экзаменационный билет № 1

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

Экзаменационный билет № 2

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство полноты

Экзаменационный билет № 3

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 4

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Экзаменационный билет № 5

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

Экзаменационный билет № 6

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 7

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 8

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Критерий линейной зависимости набора векторов.

Экзаменационный билет № 9

1. Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.
2. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

Экзаменационный билет № 10

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 11

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство полноты.

Экзаменационный билет № 12

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Экзаменационный билет № 13

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 14

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 15

1. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Экзаменационный билет № 16

1. Алгебра операторов и матриц.
2. Нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка. 2.

Экзаменационный билет № 17

1. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
2. Ультраинвариантные подпространства.

Экзаменационный билет № 18

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Экзаменационный билет № 19

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 20

1. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
2. Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p,q) .

Экзаменационный билет № 21

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 22

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).

Экзаменационный билет № 23

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).

Экзаменационный билет № 24

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 25

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Экзаменационный билет № 26

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Критерий линейной зависимости набора векторов.

Экзаменационный билет № 27

1. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Экзаменационный билет № 28

1. Поле комплексных чисел.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 29

1. Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.
2. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Экзаменационный билет № 30

1. Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле.
2. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).

Экзаменационный билет № 31

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство полноты.

Экзаменационный билет № 32

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Экзаменационный билет № 33

1. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
2. Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p,q) .

Экзаменационный билет № 34

1. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
2. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Экзаменационный билет № 35

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.
2. Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Экзаменационный билет № 36

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
2. Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p,0)$. Доказательство линейной независимости.

Экзаменационный билет № 37

1. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Экзаменационный билет № 38

1. Изоморфизм линейных пространств.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Экзаменационный билет № 39

1. Преобразование матрицы линейного оператора A при замене базиса.
Преобразование подобия.
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора:
существование, вычисление.

Экзаменационный билет № 40

1. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
2. Произведение полилинейных форм и его свойства.

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой

