

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/проф. И.А.Танкиев
от «27» февраля 2025г.

_____/Б.С. Кульбужев
от «14» марта 2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.03.02 Теория операторов

Направление подготовки

01.03.01 –МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас, 2025г

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Теория операторов» является:

- освоение основных понятий и методов функционального анализа и теории операторов;
- создание теоретической базы для последующего обучения смежным математическим дисциплинам;

Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
	В	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ	6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина относится к блоку 1: «Дисциплины по выбору». К части, формируемой участниками образовательных отношений. Читается в 7,8 семестрах. Находится под индексом Б1.В.ДВ.03.02.

3. Результаты освоения дисциплины (модуля) Теория операторов

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.
ПК-1	Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-1.1. Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа ; ПК-1.2. Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа; ПК-1.3. Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля) Теория операторов

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц, 252 часа.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра			
		7		8	
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	7	1,75з.е		5,25з.е	
Курсовой проект (работа)	не предусмотрено				
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	252	72		180	
Лекции	64	30		34	
Практические занятия, семинары	60	28		32	
Лабораторные работы					
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	101	5		96	
КСР					
Экзамен	27			27	
Общая трудоемкость дисциплины	252	72		180	

№/ №	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)									Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Формы промежут. аттест						
			Аудиторная работа					Самостоятельная работа										
			всего	лекции	Практ. занятия	Лаборат. занятия	Др.виды контак. раб.	Всего	Курсов. раб(проект)	Подготовка к экз.	Другие виды	Собеседование	Колоквиум	Проверка тестов	Проверка контр.раб	Проверка реферата	Проверка эссе и	Курсовая работа
	Модуль 1. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	7																
1	Вполне непрерывные и сопряженные операторы	7	19	8	6					2	3							
2	Теоремы Фредгольма и их применение	7	25	10	10					3	2							
3	Нормально разрешимые операторы	7	28	12	12					2	2							
	Модуль 2. Элементы спектральн ой теории линейных операторов	8																
4	Спектр и резольвента	8	41	12	12					9	8							
5	Спектральное разложение операторов	8	36	10	10					9	7							
	Модуль 3. Дифференцирование нелинейных операторов	8																
6	Сильный и слабый дифференциал	8	36	10	10					9	7							
7	Теорема о неявной функции	8	40	12	12					9	7							
Общая трудоемкость, в часах		7,8	252	64	60	-	-		-	45	56	Промежуточная аттестация						
												Форма						
												Зачет						-
												Зачет с оценкой						
												Экзамен						+

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

Модуль 1. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Тема 1. Вполне непрерывные и сопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Определение и свойства.

Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора. Квадратный корень из неотрицательного оператора.

Тема 2. Теоремы Фредгольма и их применение. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Применение к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения 2-го рода, содержащие параметр. Решение с помощью итерированных ядер. Метод определителей Фредгольма решения интегральных уравнений, содержащих параметр.

Тема 3. Нормально разрешимые операторы Нормально разрешимые операторы. Нетеровы и фредгольмовы операторы. Теорема Никольского. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений.

Модуль 2. Элементы спектральной теории линейных операторов.

Тема 4. Спектр и резольвента Собственные значения, собственные векторы, спектр и резольвента линейного оператора. Спектр самосопряженного ограниченного оператора. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора. Спектр и резольвента неограниченных операторов.

Тема 5. Спектральное разложение операторов. Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства. Интегрирование абстрактных функций. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора. Спектральная функция самосопряженного оператора. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора.

Модуль 3. Дифференцирование нелинейных операторов.

Тема 6. Сильный и слабый дифференциал Производные Фреше и Гато. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью. Формула Тейлора.

Тема 7. Теорема о неявной функции Теорема о неявной функции. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных.

Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)

Не предусмотрены учебным планом ООП

Примерная тематика курсовых работ

Не предусмотрены учебным планом ООП

5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
Раздел 1	Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве		30
1.1	Вполне непрерывные и сопряженные операторы.	Доклады на темы: 1. Спектр компактного оператора. ([1], [3]) 2. Отношения между подпространствами и ортопроекторами.([4])	
1.2	Теоремы Фредгольма и их применение.	Доклад на тему Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром([1]	
Раздел 2	Элементы спектральной теории линейных операторов		20
2.1	Спектр и резольвента	Решение задач и упражнений ([5])	
2.2	Спектральное разложение операторов.	Доклады на темы: 1. Интеграл Стильтьеса от абстрактной функции. ([4]) 2. Теорема Гильберта-Шмидта. ([1])	
Раздел 3	Дифференцирование нелинейных операторов		23
3.1	Сильный и слабый дифференциал	Решение задач и упражнений ([5])	
3.2	Теорема о неявной функции	Доклад на тему: применение теоремы о неявной функции к дифференциальным уравнениям ([1])	

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
-----------------------	--

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев

оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Тематика заданий текущего контроля

1. По части курса «Ограниченные операторы» Найти норму оператора A , действующего в пространстве $C[0,1]$ по правилу $(Af)(x)=f(x)\sin(2x) + f(0)x$. Норма в пространстве $C[0,1]$ обычная – равномерная.

2. По части курса «Неограниченные операторы» Исследовать на замкнутость и замыкаемость оператор A , действующий в пространстве $C[0,1]$ по правилу $(Af)(x)=f'(0)x$, областью определения оператора считать пространство вещественных функций на отрезке $[0,1]$, имеющих непрерывную производную. Норма в пространстве $C[0,1]$ обычная – равномерная

1. Подпространства, факторпространства. Пространства Фреше.

2. Теорема о непрерывности предела линейных отображений

3. Теорема Хана-Банаха.

4. Теорема о метризуемости компактного топологического пространства.

5. Слабая топология в сопряженном пространстве.

6. Сильная теорема о разделении выпуклых множеств в топологическом векторном пространстве.

7. Нормирование пространства, линейные ограничения оператора в нормированном пространстве.

8. Соотношение ядра и образа сопряженных операторов.

9. Теорема о замкнутости образа оператора.

10. Компактные операторы.

11. Теорема Гротендика.

12. Теорема Какутани о неподвижной точке.

13. Гильбертово пространство; операторы в гильбертовом пространстве;

14. Спектральная теорема.

15. Полярное разложение оператора.

16. Неограниченные замкнутые операторы.

17. Приводящее пространство оператора и его сопряженного.

18. Дефектное число, спектр и резольвента замкнутого оператора.
19. Свойства спектра компактных операторов.
20. Преобразование Кэли.
21. Формулы Неймана для областей значения сопряженного оператора и симметричного расширения оператора.
22. Интеграл по спектральной мере для неограниченных функций.
23. Прямой интеграл гильбертовых пространств.
24. Связь операторов умножения с разложимыми операторами.

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр. работа (проверка и оценка)	Раздел 1- Раздел 3	УК-1, ПК-1
2	Теоретический тест	Раздел 2	УК-1, ПК-1
3	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Раздел 1- Раздел 3	УК-1, ПК-1
5	экзамен в 1 семестре	Раздел 1 - Раздел 3	УК-1, ПК-1

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) специальные функции

7.1. Учебная литература:

Основная литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1996.
2. Действительный анализ в задачах / П.Л.Ульянов, А.Н.Бахвалов. М.: Физматлит, 2015. ISBN 978-5-9221-0595-8 - 30 экз.
3. Задачи по функциональному анализу / П.А.Бородин, А.М.Савчук, И.А.Шейпак. М.: МЦНМО, 2017. ISBN: 978-5-4469-3092-3 - 30 экз.
4. Краткий курс функционального анализа / Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. 2-е изд. М.: Лань, 2017. ISBN 978-5-8114-0976-1 - 30 экз.

Дополнительная литература

1. В.И. Богачев, О.Г.Смолянов. Действительный и функциональный анализ. РХД, Ижевск, 2011. ISBN 978-5-93972-911-6
2. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу Москва, МЦНМО, 2014. 560 с. Твердый переплет. ISBN 978-5-4439-0141-1.
3. Садовничий В. А. Теория операторов. 5-е изд. Дрофа, 2004. 384 стр. ISBN 5-7107-8699-3.
4. П.Н. Князев, Функциональный анализ. 208 с. Москва, УРСС, 2009, ISBN 978-5-397-00109-0
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. Учебник. 3-е изд. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 стр. ISBN 5-9221-0272-9
6. Мера и интеграл. П.Л. Ульянов, М.И. Дьяченко Количество страниц 160 Год выпуска 2002 ISBN 5-88688-055-0
7. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. Изд.2, перераб. и суц. доп. URSS. 2015. 336 с. Твердый переплет. ISBN 978-5-9710-2135-3.
8. Богачев В.И., Основы теории меры, 2-е изд., том 1, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006 ISBN: 5-93972-432-9
9. Богачев В.И., Основы теории меры, 2-е изд., том 2, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006 ISBN: 5-93972-433-7
10. Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. — Регулярная и хаотическая динамика Москва - Ижевск, 2008. ISBN: 978-5-93972-696-2

7.2. Интернет-ресурсы

Поскольку в настоящее время при работе с информацией широко используются ресурсы телекоммуникационной сети «Интернет» (далее — сеть «Интернет»), то следует указать перечень сайтов, использующихся для получения дополнительных знаний по изучаемой дисциплине. Также следует указать адрес сайта, содержащего учебную информацию по курсу (при его наличии), принципы размещения в нем информации и способы работы с сайтом.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Exponenta .ru	www.exponenta.ru	На сайте размещены электронные учебники,

			справочники, статьи, примерами применения математических пакетов в образовательном процессе, демо-версии по популярным математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
2.	<u>Math.ru</u>	www.math.ru	Математический сайт для школьников, студентов, учителей и всех, кто интересуется математикой.
3.	Математика	www.mathematics.ru	Учебный материал по различным разделам математики.
4.	Математика для студентов и прочее.	www.xplusy.isnet.ru	Содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.
5.	Российское образование.	www.edu.ru	Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.

7.3. Программное обеспечение:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

7.4. Материально-техническое обеспечение

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала (специализированное демонстрационное оборудование):

1. Доска и мел (или более современные аналоги)
2. компьютерные и мультимедийные технологии
3. микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов).

Рабочая программа дисциплины **Теория операторов** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования **бакалавриат**), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика с учетом *примерной программы учебной дисциплины* из ПООП.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ»

Протокол № 6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета
протокол № 7 от «13» марта 2024 г.

Приложение №1

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Результаты освоения дисциплины (модуля) «Теория операторов»		
Код и наименование компетенции	Индикаторы	Дескрипторы
Универсальные компетенции (УК)		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.	Знает основные принципы самовоспитания и самообразования, профессионального и личностного развития, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда. Умеет планировать свое рабочее время и время для саморазвития. формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области

		профессиональной деятельности, индивидуально-личностных особенностей. Владеет практическим опытом получения дополнительного образования, изучения дополнительных образовательных программ.
--	--	--

Профессиональные компетенции (ПК)		
ПК-1 Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-1.1. Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа ; ПК-1.2. Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа; ПК-1.3. Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода.	Знать: утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа Уметь: пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа Владеть: методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	- Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи.	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на

		поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся

		недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Оценивание ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворите	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы
льно»	не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетвори тельно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

1. Определение метрического пространства.
2. Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры метрических пространств.
3. Сходимость. Непрерывность метрики. Открытые замкнутые множества и их свойства.
4. Сепарабельные пространства. Примеры.
5. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
6. Теорема Бэра.
7. Принцип сжимающих отображений.
8. Приложение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.
9. Приложение принципа сжимающих отображений к задаче Коши.

10. Компактность в метрических пространствах. Теоремы о непрерывных функциях на компактных множествах.
11. Критерий компактности Хаусдорфа.
12. Критерий Арцела относительной компактности множеств в пространстве непрерывных функций.
13. Теорема Пеано.
14. Линейные нормированные пространства. Непрерывность алгебраических операций и нормы. Примеры ЛНП. Ряды в банаховых

пространствах.

15. Предгильбертовы пространства. Теорема о норме.
16. Свойства скалярного произведения. Ортогональность. Процесс ортогонализации.
17. Ортонормированный базис. Теорема о существовании.
18. Теорема Рисса – Фишера о разложении по ортонормированному базису.
19. Теорема об ортогональном разложении.
20. Примеры ортонормированных базисов.
21. Теорема об изоморфизме гильбертовых пространств.
22. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Теорема о ее вычислении.
23. Примеры операторов: интегральные операторы, оператор ортогонального проектирования, линейные функционалы.
24. Теорема о продолжении оператора по непрерывности.
25. Действия над линейными операторами. Теорема о полноте пространства операторов.
26. Равномерная и поточечная сходимости последовательностей операторов.
27. Принцип равномерной ограниченности.
28. Критерий поточечной сходимости.
29. Обратимые операторы. Общий критерий обратимости.
30. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному.
31. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.
32. Приложение теорем об обратимости к интегральным уравнениям.
33. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора. Теорема о резольvente и резольвентном множестве.
34. Примеры исследования спектров операторов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету в 7 семестре

1. Общая конструкция построения меры.
2. Мера Лебега на прямой.
3. Мера Лебега и мера Жордана.
4. Примеры множеств измеримых по Лебегу.
5. Свойства меры Лебега и множеств измеримых по Лебегу.
6. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств.
7. Понятие почти всюду (п.в.). Эквивалентные функции. Существенно ограниченные функции.
8. Понятие измеримой функции. Примеры.
9. Свойства измеримых функций.
10. Измеримость непрерывных функций.
11. Теорема Лузина. Пример.
12. Интегральные суммы Лебега и Римана.
13. Интеграл Лебега для ограниченных функций. Нижняя и верхняя суммы Лебега.
14. Критерий существования интеграла Лебега.
15. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Степенные функции.
16. Интеграл Лебега для неотрицательных функций. Вертикальные срезы.
17. Интеграл Лебега для произвольных функций. Абсолютная интегрируемость.
18. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (линейность по функции, аддитивность по множеству интегрирования).
19. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (равенство нулю и положительность).
20. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (неравенства).
21. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (абсолютная суммируемость).

22. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (достаточный признак суммируемости).
23. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега. Примеры.
24. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Свойства.
25. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление функции по производной, канторовы функции.
26. Пространства конечномерных векторов и пространства функций L_p .
27. Пространства L_p . Тождественность эквивалентных функций. Примеры.
28. Линейная структура и бесконечномерность пространства L_p . Степенная система. Тригонометрическая система.
29. Норма и метрическая структура в пространствах L_p .
30. Неравенства Гёльдера и Минковского.
31. Соотношения между пространствами L_p .
32. Сходимость в пространствах L_p . Примеры.
33. Свойства пределов и сходящихся последовательностей в L_p : единственность предела.
34. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : непрерывность линейных операций, нормы и расстояния.
35. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : ограниченность и сходимость.
36. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : поточечная сходимость и сходимость в L_p .
37. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p , сходимость при разных p .
38. Полнота пространств L_p . Фундаментальные последовательности. Свойства (линейные операции, ограниченность).
39. Полнота пространств L_p . Фундаментальные последовательности.

Свойства (сходимость).

40. Полнота пространств L_p . Теорема Фишера.

41. Полнота пространств L_p . Сжимающиеся последовательности.

42. Ряды в пространствах L_p (сходимость, свойства, необходимый признак, признак Вейерштрасса).

43. Тригонометрические ряды в пространстве L $(-\pi, \pi)$. Применение признака Вейерштрасса, теорема Рисса.

44. Плотность множеств в пространствах L_p . Основные понятия. Множество непрерывных функций в пространствах L_p . Полные системы функций и базисы.

45. Плотность множеств в пространствах L_p . Множество алгебраических многочленов и множество тригонометрических многочленов. Система многочленов Лежандра. Тригонометрическая система.

46. Пространство L_2 $(-\pi, \pi)$. Скалярное произведение и норма. Неравенство Коши.

47. Пространство L_2 $(-\pi, \pi)$. Ортогональность. Примеры. Проекция на конечную систему функций. Свойства. Тригонометрическая система. Ортогональность. Проекция на тригонометрическую систему.

48. Тригонометрический ряд Фурье для функции из L_2 $(-\pi, \pi)$. Коэффициенты Фурье. Экстремальность частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.

49. Тригонометрический базис в L_2 $(-\pi, \pi)$ и L_2 (a, b) . Разложение только по синусам или только по косинусам. Теорема Рисса-Фишера.

Вопросы к экзамену в 8 семестре

1. Линейные пространства. Основные понятия: линейная независимость, размерность, изоморфизм.

2. Метрические пространства. Основные понятия: геометрия, топология, сходимость, изоморфизм.

3. Согласованность линейной и метрической структур в произвольном пространстве.
4. Нормированные пространства. Метрика. Согласованность линейной и метрической структур в нормированном пространстве.
5. Сходимость в нормированных пространствах. Свойства.
6. Основные примеры нормированных пространств.
7. Полные нормированные пространства. Основные понятия.
Конечномерные пространства. Примеры.
8. Итерационные последовательности в полных нормированных пространствах.
9. Теоремы о пополнении и полном нормированном пространстве.
10. Ряды в нормированных пространствах. Признак Вейерштрасса.
11. Плотность множеств в нормированных пространствах. Сепарабельные пространства.
12. Полные линейные независимые системы. Базисы. Степенная система.
Тригонометрическая система.
13. Компактность и предкомпактность в нормированных и банаховых пространствах. Примеры.
14. Непрерывные отображения. Теорема Вейерштрасса. Существование наилучшего приближения.
15. Полная ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Теорема Риса.
16. Предкомпактность в конкретных бесконечномерных пространствах.
17. Евклидовы пространства. Нормируемость. Неравенства Коши. Свойства скалярного произведения.
18. Ортогональность в евклидовых пространствах. Ортогонализация линейно независимой системы в евклидовом пространстве. Полиномы Лежандра.
19. Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Коэффициенты Фурье.
Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

20. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье к данному элементу.
21. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
22. Теорема Рисса-Фишера в гильбертовом пространстве.
23. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
24. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Следствия.
25. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.
26. Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма.
27. Линейные операторы в конечномерных пространствах.
28. Интегральный оператор
29. Пространство линейных ограниченных операторов. Ряды операторов.
30. Сопряжённое пространство. Его представление. Примеры.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
32. Продолжение линейных ограниченных операторов. Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
33. Обратный оператор. Непрерывная обратимость. Её условия. Теорема Банаха об обратном операторе.
34. Обратный оператор. Обратимость оператора близкого к единичному. Обратимость оператора близкого к обратимому.
35. Спектр и резольвента, их свойства. Примеры.
36. Компактные операторы. Конечномерные операторы. Единичный оператор в бесконечномерном пространстве. Обратимость компактного оператора.
37. Замкнутость множества компактных операторов в множестве ограниченных операторов.
38. Интегральный оператор.

39. Спектр компактного оператора. Нулевая точка. Собственные числа и собственные вектора.
40. Теорема Фредгольма. Пример оператора. Заданного диагональной матрицей.
41. Сопряжённые операторы. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Самосопряжённые операторы. Проекторы. Свойства. Примеры.
42. Спектр самосопряжённого оператора. Примеры.
43. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. 44. Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
45. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтера.
46. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Разложение в ряд. Уравнения с симметричным ядром. Уравнения с вырожденным ядром.
47. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.
48. Нелинейные операторы. Примеры. Непрерывность и условия Липшица. 49. Сжимающие операторы. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений. Принцип сжимающих операторов.
50. Сжимающие операторы. Следствия и применения принципа сжимающих операторов (интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода).
51. Неподвижные точки произвольных операторов. Теорема Брауэра. Теорема Шаудера.
52. Дифференцируемые операторы. Производная Фреше. Примеры, свойства (формула конечных приращений, условия сжатия).
53. Дифференцируемые операторы. Теорема о локальном обращении дифференцируемого оператора (приближённый обратный оператор). Итерационный метод Ньютона

Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой

