

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКА

СОГЛАСОВАНО

Руководитель образовательной программы

_____/ Нальгиева М. А.
от « 21 » 05 2024г.

УТВЕРЖДАЮ

Декан физико-математического факультета

_____/ Кульбужев Б. С.
от « 21 » 05 2024г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»
(индекс дисциплины по учебному плану, наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки –

03.03.02 Физика
(код, наименование)

Направленность: **Физика**

Квалификация выпускника – *бакалавр физики*

Форма обучения очная

Магас, 2024

Фонд оценочных средств по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» включает все виды оценочных средств, позволяющих проконтролировать освоение обучающимися профессиональных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций, предусмотренных Федеральным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 03.03.02_ Физика (квалификация «Бакалавр») и рабочей программой дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление».

Назначение фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) составляется в соответствии с требованиями ФГОС ВО для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» на соответствие их учебных достижений поэтапным требованиям соответствующей основной профессиональной образовательной программы (ОПОП). ФОС является составной частью рабочей программы дисциплины.

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» включает в себя: перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП; описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания; типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения ОПОП; методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Фонд оценочных средств сформирован на основе ключевых принципов оценивания:

- валидности: объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;
- надежности: использование единообразных стандартов и критериев для оценивания достижений;
- объективности: разные студенты должны иметь равные возможности добиться успеха.

Основными параметрами и свойствами ФОС являются:

- предметная направленность (соответствие предмету изучения конкретной учебной дисциплины);
- содержание (состав и взаимосвязь структурных единиц, образующих содержание теоретической и практической составляющих учебной дисциплины);
- объем (количественный состав оценочных средств, входящих в ФОС);
- качество оценочных средств и ФОС в целом, обеспечивающее получение объективных и достоверных результатов при проведении контроля с различными целями.

ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ ДИСЦИПЛИНОЙ

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет,	Знать теоретические основы, основные понятия, законы и модели основных разделов физики;

	информации, применять системный подход для решения поставленных задач	интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.	Уметь понимать, излагать и критически анализировать физическую информацию. Пользоваться теоретическими основами, законами и моделями физики; Владеть физическими и математическими методами обработки и анализа информации в области основных разделов физики.
<i>ОПК-1</i>	Способен применять базовые знания в области физико-математических и естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями в области физико-математических наук, необходимыми для решения профессиональных задач. ОПК-1.2. Аргументированно применяет физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера. ОПК-1.3. Обладает навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней естественнонаучных дисциплин.	Знает физические основы механики, молекулярной физики, природу колебаний и волн, основы термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, основы атомной и ядерной физики, понимает широту и ограниченность применения физики исследованию процессов и явлений в природе и обществе. Умеет использовать теоретические знания при объяснении результатов экспериментов, применять знания в области физики для освоения общепрофессиональных дисциплин и решения профессиональных задач, оценивает достоверность полученного решения задачи. Владеет навыками физических исследований, способен передавать результат проведенных исследований в виде

			конкретных рекомендаций в терминах предметной области знания.
--	--	--	---

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

- 1.самоконтроль и самооценка обучающегося;
- 2.контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в том числе электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;
- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.
- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимые для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Вести конспект лекций. Лекции ведутся в отдельной общей тетради, рекомендуется оставлять место для заметок, например, в виде полей. Знание основного материала предыдущих лекций, включая знание основных определений и ключевых теорем. Рекомендуется выделять в тексте ключевые слова, определения, леммы и теоремы.

практические занятия	<p>В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, лекции. Внимательно слушать и конспектировать базовые примеры, разбираемые преподавателем. Задавать уточняющие вопросы в ходе решения базовых задач преподавателем. При решении домашних заданий периодически возвращаться к разобранным на практических занятиях задачах. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу.</p> <p>Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, непредставленными в списке рекомендованной литературы.</p>
самостоятельная работа	<p>Самостоятельная работа ведется в той же тетради, что и практические занятия. Самостоятельная работа - это отдельный блок который выделяется заголовком, например, "Домашнее задание". Рекомендуется прорабатывать материал непосредственно после практических занятий. При решении задач и примеров рекомендуется их выполнение по образцу из практического занятия. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы</p>
экзамен	<p>Подготовка к экзамену или зачету ведется на основе курса лекций или рекомендованной литературы. Необходимо знание и понимание всех понятий, определений, утверждений, лемм и теорем. Необходимо умение формулировать теоремы в форме непротиворечивых логических конструкций. Желательной уметь строить и приводить примеры к соответствующим определениям и утверждениям. Необходимо знание доказательства теорем и остальных утверждений.</p>

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

I вариант

1. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

2. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:



3. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \int_0^1 \sqrt{x} y(t) dt + 1.$$

5. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

II вариант

1. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

2. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

3. Решить задачу на условный экстремум:

$$J[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 1, \quad y' - z = 0.$$

4. Найти итерированные ядра указанного ядра:

$$K(x, t) = \begin{cases} x-t, & x > t \\ t-x, & x < t \end{cases}$$

5. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx$ при условии

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

III вариант

1. Показать, что функция φ является решением интегрального уравнения Вольтерра:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = 1$.

3. Найти резольвенту ядра.

$$K(x, t) = xe^t; a = -1, \quad b = 1.$$

4. Найти норму элемента $y(x)$ в пространстве $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$ соответственно

$$y(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad n = 1, 2, 10, 100, \quad x \in [0, \pi].$$

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

IV вариант

1. Показать, что функция φ является решением интегрального уравнения Вольтерра:

$$\varphi(x) = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + x^2.$$

2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x,t) = x-t$.

3. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$\varphi(x) = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + x^2.$$

4. Для функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y' dx$$

положить $y(x) = x^2$, $\delta y(x) = x-2$ и сравнить δV с ΔV .

5. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

V вариант

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xy y') dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = -\frac{4x-2}{2x+1} + \frac{8(x-t)}{2x+1}.$$

3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xt^3 + 5x^2 t^2) \varphi(t) dt + 7xt^4 + 3$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y')^2 dx$ при условии $\int_{x_1}^{x_2} y dx = a$

, где a – постоянная.

5. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

VI вариант

1. Решить задачу вариационного исчисления:

$$L = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$$

2. Среди кривых длины $L = 10 \arcsin \frac{3}{5}$ соединяющих точки $A(-3,0)$ и $B(3,0)$ и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком AB ограничивает наибольшую площадь.

3. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 (y'')^2 + 100xy^2 - 20xy) dx, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

4. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

VII вариант

1. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$V[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

2. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi \cos^2(x-y) u(y) dy + 1 + \cos 4x.$$

3. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

4. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi [\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y] u(y) dy.$$

5. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

VIII вариант

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

2. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$u(x) = \cos x + \int_0^x u(y) dy.$$

3. Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$u(x) - 4 \int_0^1 \sin^2(xy^2) u(y) dy = 2x - \pi.$$

4. Найти методом Ритца приближенное решение задачи об экстремуме функционала:

$$V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

5. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

XI вариант

1. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2}(y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

2. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

3. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1,$$

4. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

5. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t) dt$$

X вариант

1. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

2. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

3. Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$u(x) - 4 \int_0^1 \sin^2(xy^2) u(y) dy = 2x - \pi.$$

4. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y] u(y) dy.$$

5. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

Задания для индивидуальной работы в аудитории Интегральные уравнения

1. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение $u(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+y^2} u(y) dy$.

2. Решить интегральное уравнение $u(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos^2(x-y) u(y) dy + 1 + \cos 4x$.

3. Найти итерированное ядро $K_2(x, y)$ для уравнения Фредгольма с $K(x, y) = \exp(|x| + y)$ и $a = -1$, $b = 1$.

4. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y] u(y) dy.$$

5. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$u(x) = \cos x + \int_0^x u(y) dy.$$

6. Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$u(x) - 4 \int_0^1 \sin^2(xy^2) u(y) dy = 2x - \pi.$$

Вариационное исчисление

6. Найти норму элемента $y(x)$ в пространстве $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$ соответственно

$$y(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad n = 1, 2, 10, 100, \quad x \in [0, \pi].$$

7. Для функционала $V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y' dx$ положить $y(x) = x^2$, $\delta y(x) = x - 2$ и сравнить δV с ΔV .

8. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$V[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

9. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

10. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

11. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

13. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx, \quad \text{проходящей через точки } y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

14. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2}(y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

15. Найти методом Рунге приближенное решение задачи об экстремуме функционала:

$$1. \quad V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

Образцы контрольных заданий

Контрольная работа по теме «Вариационное исчисление»

ВАРИАНТ № 1

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy') dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx$ при условии

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

5. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 (y'')^2 + 100xy^2 - 20xy) dx, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

ВАРИАНТ № 2

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y')^2 dx$ при условии

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = a, \quad \text{где } a - \text{постоянная.}$$

5. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Вопросы к зачету

1. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами в классе непрерывных функций. Сведение к системе алгебраических уравнений.
2. Собственные числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Резольвента.
3. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений.
4. Понятие оператора. Примеры. Метрическое пространство $C[a, b]$. Проверка аксиом метрического пространства. Сходимость в $C[a, b]$.
5. Определение фундаментальной последовательности. Определение полного пространства. Примеры полных и неполных пространств.
6. Теорема Банаха (построение последовательных приближений, доказательство фундаментальности этой последовательности, доказательство существования и единственности решения уравнения $Ax=x$).
7. Применение метода последовательных приближений: интегральные уравнения с малым непрерывным ядром, итерированные ядра, резольвента.
8. Нелинейные интегральные уравнения с непрерывным ядром; интегральные уравнения Вольтерра, итерированные ядра, резольвента для него.
9. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром, теоремы Фредгольма.
10. Интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.
11. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма со слабой особенностью. Метод их решения. Примеры.
12. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода, обобщенное уравнение Абеля.
13. Преобразование Фурье, его свойства. Примеры.
14. Решение интегрального уравнения типа свертки.
15. Определение функционала. Примеры. Основная лемма вариационного исчисления для функций одного и многих переменных.
16. Определение относительного экстремума функционала. Необходимые условия для существования относительного экстремума для функционалов
вида: $\int_a^b f(x, y, y') dx, \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$

17. Уравнения Эйлера и Остроградского.
18. Классические задачи вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрические задачи.
19. Достаточные условия экстремума.
20. Упрощенное достаточное условие сильного экстремума.
21. Достаточные условия экстремума слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций.

7.1. Основная литература

1. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. – М.: Изд. МГУ, 1989.
2. Эльсгольд Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: УРСС, 1998.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики: Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. - Томск: Изд-во НТЛ, 2002.
4. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. – М.: Гостехиздат, 1950.
5. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. – М.: Гостехиздат, 1941.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 1961.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975.
9. П.И. Лизоркин. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. . М.: ГИФМЛ, 1981
10. С.Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1989
11. И.Г. Петровский. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1985
12. В. И. Юдович. Лекции об уравнениях математической физики (часть вторая) Ростов-на-Дону. Изд-во РГУ, 2006.

Дополнительная литература

1. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов А.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 2003.
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.
4. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 2000.

7.3. Программное обеспечение и Интернет - ресурсы:

<http://www.lib.mexmat.ru> - Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета

<http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. **<http://www.benran.ru/>** - Библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

<http://www.edu.ru/> - Федеральный портал «Российское образование»;

<http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России;