

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКА

СОГЛАСОВАНО

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/ Нальгиева М. А.
от « 21 » 05 2024г.

_____/ Кульбужев Б. С.
от « 21 » 05 2024г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Численные методы и математическое моделирование»
(индекс дисциплины по учебному плану, наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки –

03.03.02 Физика

(код, наименование)

Направленность: **Физика**

Квалификация выпускника – *бакалавр физики*

Форма обучения очная

Магас, 2024

1.Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

В процессе освоения образовательной программы компетенции формируются по следующим этапам:

начальный этап дает общее представление о виде деятельности, основных закономерностях функционирования объектов профессиональной деятельности, методов и алгоритмов решения практических задач;

основной этап позволяет решать типовые задачи, принимать профессиональные и управленческие решения по известным алгоритмам, правилам и методикам;

завершающий этап предполагает готовность решать практические задачи повышенной сложности, нетиповые задачи, принимать профессиональные и управленческие решения в условиях неполной определенности, при недостаточном документальном, нормативном и методическом обеспечении.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе, что приведено в таблице 1.

Таблица 1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Категория(группа) Общепрофессиональ ных компетенций	Код и наименование общепрофессиональ ной компетенции	Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции
Информационная культура	ОПК-3. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности.	ОПК-3.1 Знает основное содержание современных ИТ, используемых при решении задач профессиональной деятельности. ОПК-3.2 Умеет выбирать современные ИТ? Используемые для решения задач профессиональной деятельности. ОПК-3.3. Владеет навыками использования современных ИТ для решения задач профессиональной деятельности.
Системное и критическое мышление	УК-3. Способен осуществлять Социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.1. Определяет свою роль в социальном взаимодействии и командной работе, исходя из стратегии сотрудничества для достижения поставленной цели; УК-3.2. При реализации своей роли в социальном взаимодействии и командной работе учитывает особенности поведения и интересы других участников; УК-3.3. Анализирует возможные последствия личных действий в социальном взаимодействии и командной работе, и строит продуктивное

		<p>взаимодействие с учетом этого;</p> <p>УК- 3.4. Осуществляет обмен информацией, знаниями и опытом с членами команды; оценивает идеи других членов команды для достижения поставленной цели;</p> <p>УК-3.5. Соблюдает нормы и установленные правила командной работы; несет личную ответственность за результат.</p>
--	--	---

2. Критерии оценивания образовательных результатов обучающегося в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично» (91-100)	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо» (81-90)	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно» (61-80)	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно» (менее 61)	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Вести конспект лекций. Лекции ведутся в отдельной общей тетради, рекомендуется оставлять место для заметок, например в виде полей. Знание основного материала предыдущих лекций, включая знание основных определений и ключевых теорем. Рекомендуется выделять в тексте ключевые слова, определения, леммы и теоремы.

<p>Практические занятия</p>	<p>В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, лекции. Внимательно слушать и конспектировать базовые примеры, разбираемые преподавателем. Задавать уточняющие вопросы в ходе решения базовых задач преподавателем. При решении домашних заданий периодически возвращаться к разобранным на практических занятиях задачах. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу.</p> <p>Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, непредставленными в списке рекомендованной литературы.</p>
<p>Лабораторная работа</p>	<p>Работа в компьютерном классе.</p> <p>Приводится алгоритм выполнения задания. В зависимости от целей работы приводятся конкретные инструкции, по проведению исследований устройства с указанием уровней или параметров входных или возмущающих воздействий различной физической природы. Иногда для достижения одной цели может быть поставлено несколько различных исследований или опытов. В заключение студенту предлагается заполнить подготовленные таблицы, произвести дополнительные расчеты, построить графики и выполнить другие действия по результатам исследований.</p>
<p>самостоятельная работа</p>	<p>Самостоятельная работа ведется в той же тетради, что и практические занятия. Самостоятельная работа - это отдельный блок который выделяется заголовком, например, "Домашнее задание". Рекомендуется прорабатывать материал непосредственно после практических занятий. При решении задач и примеров рекомендуется их выполнение по образцу из практического занятия. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы</p>
<p>экзамен</p>	<p>Подготовка к экзамену или зачету ведется на основе курса лекций или рекомендованной литературы. Необходимо знание и понимание всех понятий, определений, утверждений, лемм и теорем. Необходимо умение формулировать теоремы в форме непротиворечивых логических конструкций. Желательной уметь строить и приводить примеры к соответствующим определениям и утверждениям. Необходимо знание доказательства теорем и остальных утверждений.</p>

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Примерные вопросы к зачету:

1. Классификация погрешностей. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Верные знаки числа. Арифметические действия над приближенными числами.
2. Правила приближенных вычислений. Погрешности вычисления значений функции.
3. Устойчивость. Корректность. Сходимость итерационных последовательностей.
4. Численные методы решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Методы дихотомии.
5. Численные методы решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Метод Ньютона.
6. Численные методы решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Метод простой итерации.
7. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод Гаусса.
8. Метод прогонки. Контроль точности при реализации прямых методов решения СЛАУ.
9. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Теорема об оценках погрешностей.
10. Аппроксимация функций. Интерполирование функций. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.
11. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
12. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.
13. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи. Классификация методов. Метод Пикара.
14. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера и его модификации.
15. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Семейство методов Рунге- Кутты.

16. Приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка краевой задачи. Классификация методов.

17. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод конечных разностей.

18. Минимум функции одной переменной. Постановка задачи и стратегии поиска. Метод золотого сечения.

19. Минимум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия минимума дифференцируемой функции многих переменных. Метод градиентного спуска, метод наискорейшего спуска.

20. Постановка и классификация задач математического программирования. Решение задач линейного программирования: постановка задачи, графический метод, симплекс-метод, симплексные таблицы.

21. Решение задач линейного программирования: симплекс- метод, симплексные таблицы.

Практическая работа № 1 «Приближенные вычисления»

Практическая работа № 2 «Приближенное решение уравнений»

Упражнения.

Отделить корни уравнения графически и методом исследования отрезков.

1. $x^3 - 12x + 1 = 0$. (Ответ: (-4;-3), (0;1),(3;4))

2. $x^3 + 2x - 7 = 0$. (Ответ: (1;2))

3. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$. (Ответ: (0;1), (2;3),(6;7))

Решить способом хорд и касательных с точностью до 0,01 следующие уравнения:

4. $x^4 + 3x - 20 = 0$. (Ответ: 1,94)

5. $x^3 - 2x - 5 = 0$. (Ответ: 2,09)

6. $x^4 - 3x + 1 = 0$. (Ответ: 0,33; 1,30)

7. $x^3 + 3x + 5 = 0$. (Ответ: -1,15)

Применив комбинированный способ хорд и касательных решить уравнение.

8. $x^4 + 5x - 7 = 0$. (Ответ: 1,11)

Решить способом итераций с точностью до 0,01 следующие уравнения.

9. $x^3 - 12x + 5 = 0$. (Ответ: 0,42)

10. $x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$. (Ответ: 3,62)

Практическая работа № 3

«Интерполирование функций»

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, найти уравнение параболы проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1). (Ответ: $y = 32 - 1(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640)$)

2. Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Используя интерполяционную формулу Лагранжа, составить уравнение функции, принимающей указанные значения при заданных значениях аргумента. (Ответ: $y = 3 - (-2x^3 - 15x^2 + 25x - 9)$)

3. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, принимающую значения заданные таблицей. $x \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 & y & -7 & 5 & 8 & 14 \end{matrix}$ (Ответ: $y = 5 - (x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$)

4. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, график которой проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19). (Ответ: $y = 2x - 1$)

5. Даны десятичные логарифмы чисел: $\lg 2,0 = 0,30103$, $\lg 2,1 = 0,32222$, $\lg 2,2 = 0,34242$, $\lg 2,3 = 0,36173$, $\lg 2,4 = 0,38021$, $\lg 2,5 = 0,39794$. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $\lg 2,03$. (Ответ: $\lg 2,03 = 0,30750$)

6. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(4) = 45$. (Ответ: $y = 4x^2 - 7x + 9$)
7. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x) = 2x$ и ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и вычислить $f(-0,5)$ и $f(2,5)$. (Ответ: $y = 8 + 4(x - 3) + (x - 3)(x - 2) + 6 \cdot 1(x - 3)(x - 2)(x - 1) + 48 \cdot 1(x - 3)(x - 2)(x - 1)x$, $f(-0,5) = 0,700$, $f(2,5) = 5,658$.)
8. Составить интерполяционную формулу Ньютона по данным таблицы
- | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|----|----|----|
| y | 1 | 4 | 15 | 40 | 85 |
- (Ответ: $y = x^3 + x^2 + x + 1$)

Практическая работа № 4

«Приближенное решение дифференциальных уравнений»

Упражнения.

- По формуле прямоугольников вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x} dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.
(Ответ: $I \approx 1,20 \pm 0,025$)
- По формуле трапеций вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x} dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.
(Ответ: $I \approx 1,218 \pm 0,002$)
- По формуле Симпсона вычислить $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, с точностью до 0,001
(Ответ: $I \approx 1,148 \pm 0,001$)
- По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$, с точностью до 0,0001
(Ответ: $n = 10$, $I \approx 0,50001 \pm 0,0001$)
- По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, с точностью до 0,01
(Ответ: $n = 5$, $I \approx 0,69 \pm 0,01$)
- По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$, с точностью до 0,01
(Ответ: $n = 4$, $I \approx 0,24 \pm 0,01$)
- По формуле трапеций вычислить $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, с точностью до 0,01
(Ответ: $n = 4$, $I \approx 0,75 \pm 0,01$)
- По формуле трапеций вычислить $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$, с точностью до 0,01

Практическая работа № 5 «Приближенное решение дифференциальных уравнений»

Упражнения.

1. Найти, используя метод Эйлера, значения функции y , определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$, при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений y .

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

2. Найти по методу Эйлера четыре значения функции y , определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$.

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

3. Найти по методу Эйлера три значения функции y , определяемой уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$.

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

4. Найти по методу Эйлера четыре значения функции y , определяемой уравнением $y' = x^2 + y^2$, при начальном условии $y(0) = 0$, принимая $h = 0,1$.

Ответ:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,001	0,005	0,014

5. Найти, используя метод Эйлера, значения функции y , определяемой дифференциальным уравнением $y' = y^2 + \frac{x}{y}$, при начальном условии $y(2) = 4$, принимая $h = 0,1$. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений y .

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

6. Найти методом Эйлера численное решение уравнения $y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ на отрезке $[0; 1]$, при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,2$.

Ответ:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27

Лабораторная работа №2.

«МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

2. Лабораторная работа №2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Прямые методы решения

2.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (2.1)$$

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (2.2)$$

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – вектор свободных членов, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных с вещественными координатами, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ – вещественная матрица размера $n \times n$, матрица коэффициентов системы (2.1).

Эффективность способов решения системы (2.1) во многом зависит от структуры и свойств матрицы A : размера, обусловленности, симметричности, заполненности (т. е. соотношения между числом нулевых и ненулевых элементов), специфики расположения ненулевых элементов матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли: Необходимым условием существования единственного решения системы (2.1) является:

$$\det A \neq 0.$$

Определение. Нормой называется такая величина, обладающая свойствами:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Определение. Если в пространстве векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ введена норма $\|\bar{x}\|$, то согласованной с ней нормой в пространстве матриц A называется норма $\|A\| = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $x \neq 0$.

Таблица 2.1

Виды норм векторов и матриц

В пространстве векторов	В пространстве матриц
1. Кубическая норма	
$\ \bar{x}\ = \max_{i,j,k} x_i $	$\ A\ = \max_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^n a_{ljk} \right)$
2. Октаэдрическая норма	
$\ \bar{x}\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ A\ _1 = \max_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{ijk} \right)$
3. Сферическая норма	
$\ \bar{x}\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2} = \sqrt{(x, x)}$	$\ A\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

2.1.2. Метод Гаусса

Один из методов решения системы (2.1) – метод Гаусса. Суть метода Гаусса заключается в приведении исходной матрицы A к треугольному виду. Будем постоянно приводить систему (2.1) к треугольному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, ..., n -го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, ..., n -го уравнений преобразованной системы и т. д.

На первом этапе заменим второе, третье, ..., n -е уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, ..., $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет эквивалентная (2.1) система

№	Система уравнений
24	$3,241 \cdot x_1 + 0,197 \cdot x_2 + 0,643 \cdot x_3 + 0,236 \cdot x_4 = 0,454$ $0,257 \cdot x_1 + 3,853 \cdot x_2 + 0,342 \cdot x_3 + 0,427 \cdot x_4 = 0,371$ $0,324 \cdot x_1 + 0,317 \cdot x_2 + 2,793 \cdot x_3 + 0,238 \cdot x_4 = 0,465$ $0,438 \cdot x_1 + 0,326 \cdot x_2 + 0,483 \cdot x_3 + 4,229 \cdot x_4 = 0,822.$
25	$4,405 \cdot x_1 + 0,472 \cdot x_2 + 0,395 \cdot x_3 + 0,253 \cdot x_4 = 0,623$ $0,227 \cdot x_1 + 2,957 \cdot x_2 + 0,342 \cdot x_3 + 0,327 \cdot x_4 = 0,072$ $0,419 \cdot x_1 + 0,341 \cdot x_2 + 3,238 \cdot x_3 + 0,394 \cdot x_4 = 0,143$ $0,325 \cdot x_1 + 0,326 \cdot x_2 + 0,401 \cdot x_3 + 4,273 \cdot x_4 = 0,065.$
26	$2,974 \cdot x_1 + 0,347 \cdot x_2 + 0,439 \cdot x_3 + 0,123 \cdot x_4 = 0,381$ $0,242 \cdot x_1 + 2,895 \cdot x_2 + 0,412 \cdot x_3 + 0,276 \cdot x_4 = 0,721$ $0,249 \cdot x_1 + 0,378 \cdot x_2 + 3,791 \cdot x_3 + 0,358 \cdot x_4 = 0,514$ $0,387 \cdot x_1 + 0,266 \cdot x_2 + 0,431 \cdot x_3 + 4,022 \cdot x_4 = 0,795.$
27	$3,452 \cdot x_1 + 0,458 \cdot x_2 + 0,125 \cdot x_3 + 0,236 \cdot x_4 = 0,745$ $0,254 \cdot x_1 + 2,458 \cdot x_2 + 0,325 \cdot x_3 + 0,126 \cdot x_4 = 0,789$ $0,305 \cdot x_1 + 0,125 \cdot x_2 + 3,869 \cdot x_3 + 0,458 \cdot x_4 = 0,654$ $0,423 \cdot x_1 + 0,452 \cdot x_2 + 0,248 \cdot x_3 + 3,896 \cdot x_4 = 0,405.$
28	$2,979 \cdot x_1 + 0,427 \cdot x_2 + 0,406 \cdot x_3 + 0,348 \cdot x_4 = 0,341$ $0,273 \cdot x_1 + 3,951 \cdot x_2 + 0,217 \cdot x_3 + 0,327 \cdot x_4 = 0,844$ $0,318 \cdot x_1 + 0,197 \cdot x_2 + 2,875 \cdot x_3 + 0,166 \cdot x_4 = 0,131$ $0,219 \cdot x_1 + 0,231 \cdot x_2 + 0,187 \cdot x_3 + 3,276 \cdot x_4 = 0,381.$
29	$2,048 \cdot x_1 + 0,172 \cdot x_2 + 0,702 \cdot x_3 + 0,226 \cdot x_4 = 0,514$ $0,495 \cdot x_1 + 4,093 \cdot x_2 + 0,083 \cdot x_3 + 0,390 \cdot x_4 = 0,176$ $0,277 \cdot x_1 + 0,368 \cdot x_2 + 4,164 \cdot x_3 + 0,535 \cdot x_4 = 0,309$ $0,766 \cdot x_1 + 0,646 \cdot x_2 + 0,767 \cdot x_3 + 5,960 \cdot x_4 = 0,535.$
30	$2,389 \cdot x_1 + 0,273 \cdot x_2 + 0,126 \cdot x_3 + 0,418 \cdot x_4 = 0,144$ $0,329 \cdot x_1 + 2,796 \cdot x_2 + 0,179 \cdot x_3 + 0,278 \cdot x_4 = 0,297$ $0,186 \cdot x_1 + 0,275 \cdot x_2 + 2,987 \cdot x_3 + 0,316 \cdot x_4 = 0,529$ $0,197 \cdot x_1 + 0,219 \cdot x_2 + 0,274 \cdot x_3 + 3,127 \cdot x_4 = 0,869.$

№	Система уравнений
17	$5,482 \cdot x_1 + 0,358 \cdot x_2 + 0,237 \cdot x_3 + 0,409 \cdot x_4 = 0,416$ $0,580 \cdot x_1 + 4,953 \cdot x_2 + 0,467 \cdot x_3 + 0,028 \cdot x_4 = 0,464$ $0,319 \cdot x_1 + 0,372 \cdot x_2 + 8,935 \cdot x_3 + 0,520 \cdot x_4 = 0,979$ $0,043 \cdot x_1 + 0,459 \cdot x_2 + 0,319 \cdot x_3 + 4,778 \cdot x_4 = 0,126.$
18	$3,738 \cdot x_1 + 0,195 \cdot x_2 + 0,275 \cdot x_3 + 0,136 \cdot x_4 = 0,815$ $0,519 \cdot x_1 + 5,002 \cdot x_2 + 0,405 \cdot x_3 + 0,283 \cdot x_4 = 0,191$ $0,306 \cdot x_1 + 0,381 \cdot x_2 + 4,812 \cdot x_3 + 0,418 \cdot x_4 = 0,423$ $0,272 \cdot x_1 + 0,142 \cdot x_2 + 0,314 \cdot x_3 + 3,935 \cdot x_4 = 0,352.$
19	$3,910 \cdot x_1 + 0,129 \cdot x_2 + 0,283 \cdot x_3 + 0,107 \cdot x_4 = 0,395$ $0,217 \cdot x_1 + 4,691 \cdot x_2 + 0,279 \cdot x_3 + 0,237 \cdot x_4 = 0,432$ $0,201 \cdot x_1 + 0,372 \cdot x_2 + 2,987 \cdot x_3 + 0,421 \cdot x_4 = 0,127$ $0,531 \cdot x_1 + 0,196 \cdot x_2 + 0,236 \cdot x_3 + 5,032 \cdot x_4 = 0,458.$
20	$5,482 \cdot x_1 + 0,617 \cdot x_2 + 0,520 \cdot x_3 + 0,401 \cdot x_4 = 0,823$ $0,607 \cdot x_1 + 4,195 \cdot x_2 + 0,232 \cdot x_3 + 0,570 \cdot x_4 = 0,152$ $0,367 \cdot x_1 + 0,576 \cdot x_2 + 8,193 \cdot x_3 + 0,582 \cdot x_4 = 0,625$ $0,389 \cdot x_1 + 0,356 \cdot x_2 + 0,207 \cdot x_3 + 5,772 \cdot x_4 = 0,315.$
21	$3,345 \cdot x_1 + 0,329 \cdot x_2 + 0,365 \cdot x_3 + 0,203 \cdot x_4 = 0,305$ $0,125 \cdot x_1 + 4,210 \cdot x_2 + 0,402 \cdot x_3 + 0,520 \cdot x_4 = 0,283$ $0,314 \cdot x_1 + 0,251 \cdot x_2 + 4,531 \cdot x_3 + 0,168 \cdot x_4 = 0,680$ $0,197 \cdot x_1 + 0,512 \cdot x_2 + 0,302 \cdot x_3 + 2,951 \cdot x_4 = 0,293.$
22	$4,247 \cdot x_1 + 0,275 \cdot x_2 + 0,397 \cdot x_3 + 0,239 \cdot x_4 = 0,721$ $0,466 \cdot x_1 + 4,235 \cdot x_2 + 0,264 \cdot x_3 + 0,358 \cdot x_4 = 0,339$ $0,204 \cdot x_1 + 0,501 \cdot x_2 + 3,721 \cdot x_3 + 0,297 \cdot x_4 = 0,050$ $0,326 \cdot x_1 + 0,421 \cdot x_2 + 0,254 \cdot x_3 + 3,286 \cdot x_4 = 0,486.$
23	$3,476 \cdot x_1 + 0,259 \cdot x_2 + 0,376 \cdot x_3 + 0,398 \cdot x_4 = 0,871$ $0,425 \cdot x_1 + 4,583 \cdot x_2 + 0,417 \cdot x_3 + 0,328 \cdot x_4 = 0,739$ $0,252 \cdot x_1 + 0,439 \cdot x_2 + 3,972 \cdot x_3 + 0,238 \cdot x_4 = 0,644$ $0,265 \cdot x_1 + 0,291 \cdot x_2 + 0,424 \cdot x_3 + 3,864 \cdot x_4 = 0,581.$

№	Система уравнений
10	$2,958 \cdot x_1 + 0,147 \cdot x_2 + 0,354 \cdot x_3 + 0,238 \cdot x_4 = 0,651$ $0,127 \cdot x_1 + 2,395 \cdot x_2 + 0,256 \cdot x_3 + 0,273 \cdot x_4 = 0,898$ $0,403 \cdot x_1 + 0,184 \cdot x_2 + 3,815 \cdot x_3 + 0,416 \cdot x_4 = 0,595$ $0,259 \cdot x_1 + 0,361 \cdot x_2 + 0,281 \cdot x_3 + 3,736 \cdot x_4 = 0,389.$
11	$4,503 \cdot x_1 + 0,219 \cdot x_2 + 0,527 \cdot x_3 + 0,396 \cdot x_4 = 0,553$ $0,259 \cdot x_1 + 5,121 \cdot x_2 + 0,423 \cdot x_3 + 0,206 \cdot x_4 = 0,358$ $0,413 \cdot x_1 + 0,531 \cdot x_2 + 4,317 \cdot x_3 + 0,264 \cdot x_4 = 0,565$ $0,327 \cdot x_1 + 0,412 \cdot x_2 + 0,203 \cdot x_3 + 4,851 \cdot x_4 = 0,436.$
12	$5,103 \cdot x_1 + 0,293 \cdot x_2 + 0,336 \cdot x_3 + 0,270 \cdot x_4 = 0,745$ $0,179 \cdot x_1 + 4,912 \cdot x_2 + 0,394 \cdot x_3 + 0,375 \cdot x_4 = 0,381$ $0,189 \cdot x_1 + 0,321 \cdot x_2 + 2,875 \cdot x_3 + 0,216 \cdot x_4 = 0,480$ $0,317 \cdot x_1 + 0,165 \cdot x_2 + 0,386 \cdot x_3 + 3,934 \cdot x_4 = 0,552.$
13	$5,554 \cdot x_1 + 0,252 \cdot x_2 + 0,496 \cdot x_3 + 0,237 \cdot x_4 = 0,442$ $0,580 \cdot x_1 + 4,953 \cdot x_2 + 0,467 \cdot x_3 + 0,028 \cdot x_4 = 0,464$ $0,319 \cdot x_1 + 0,372 \cdot x_2 + 8,935 \cdot x_3 + 0,520 \cdot x_4 = 0,979$ $0,043 \cdot x_1 + 0,459 \cdot x_2 + 0,319 \cdot x_3 + 4,778 \cdot x_4 = 0,126.$
14	$2,998 \cdot x_1 + 0,209 \cdot x_2 + 0,315 \cdot x_3 + 0,281 \cdot x_4 = 0,108$ $0,163 \cdot x_1 + 3,237 \cdot x_2 + 0,226 \cdot x_3 + 0,307 \cdot x_4 = 0,426$ $0,416 \cdot x_1 + 0,175 \cdot x_2 + 3,239 \cdot x_3 + 0,159 \cdot x_4 = 0,310$ $0,287 \cdot x_1 + 0,196 \cdot x_2 + 0,325 \cdot x_3 + 4,062 \cdot x_4 = 0,084.$
15	$5,452 \cdot x_1 + 0,401 \cdot x_2 + 0,758 \cdot x_3 + 0,123 \cdot x_4 = 0,886$ $0,785 \cdot x_1 + 2,654 \cdot x_2 + 0,687 \cdot x_3 + 0,203 \cdot x_4 = 0,356$ $0,402 \cdot x_1 + 0,244 \cdot x_2 + 4,456 \cdot x_3 + 0,552 \cdot x_4 = 0,342$ $0,210 \cdot x_1 + 0,514 \cdot x_2 + 0,206 \cdot x_3 + 4,568 \cdot x_4 = 0,452.$
16	$2,923 \cdot x_1 + 0,220 \cdot x_2 + 0,159 \cdot x_3 + 0,328 \cdot x_4 = 0,605$ $0,363 \cdot x_1 + 4,123 \cdot x_2 + 0,268 \cdot x_3 + 0,327 \cdot x_4 = 0,496$ $0,169 \cdot x_1 + 0,271 \cdot x_2 + 3,906 \cdot x_3 + 0,295 \cdot x_4 = 0,590$ $0,241 \cdot x_1 + 0,319 \cdot x_2 + 0,257 \cdot x_3 + 3,862 \cdot x_4 = 0,896.$

№	Система уравнений
3	$2,979 \cdot x_1 + 0,427 \cdot x_2 + 0,406 \cdot x_3 + 0,348 \cdot x_4 = 0,341$ $0,273 \cdot x_1 + 3,951 \cdot x_2 + 0,217 \cdot x_3 + 0,327 \cdot x_4 = 0,844$ $0,318 \cdot x_1 + 0,197 \cdot x_2 + 2,875 \cdot x_3 + 0,166 \cdot x_4 = 0,131$ $0,219 \cdot x_1 + 0,231 \cdot x_2 + 0,187 \cdot x_3 + 3,276 \cdot x_4 = 0,381.$
4	$3,738 \cdot x_1 + 0,195 \cdot x_2 + 0,275 \cdot x_3 + 0,136 \cdot x_4 = 0,815$ $0,519 \cdot x_1 + 5,002 \cdot x_2 + 0,405 \cdot x_3 + 0,283 \cdot x_4 = 0,191$ $0,306 \cdot x_1 + 0,381 \cdot x_2 + 4,812 \cdot x_3 + 0,418 \cdot x_4 = 0,423$ $0,272 \cdot x_1 + 0,142 \cdot x_2 + 0,314 \cdot x_3 + 3,935 \cdot x_4 = 0,352.$
5	$4,855 \cdot x_1 + 1,239 \cdot x_2 + 0,272 \cdot x_3 + 0,258 \cdot x_4 = 1,192$ $1,491 \cdot x_1 + 4,954 \cdot x_2 + 0,124 \cdot x_3 + 0,236 \cdot x_4 = 0,256$ $0,456 \cdot x_1 + 0,285 \cdot x_2 + 4,354 \cdot x_3 + 0,254 \cdot x_4 = 0,852$ $0,412 \cdot x_1 + 0,335 \cdot x_2 + 0,158 \cdot x_3 + 2,874 \cdot x_4 = 0,862.$
6	$5,401 \cdot x_1 + 0,519 \cdot x_2 + 0,364 \cdot x_3 + 0,283 \cdot x_4 = 0,243$ $0,295 \cdot x_1 + 4,830 \cdot x_2 + 0,421 \cdot x_3 + 0,278 \cdot x_4 = 0,231$ $0,524 \cdot x_1 + 0,397 \cdot x_2 + 4,723 \cdot x_3 + 0,389 \cdot x_4 = 0,721$ $0,503 \cdot x_1 + 0,264 \cdot x_2 + 0,248 \cdot x_3 + 4,286 \cdot x_4 = 0,220.$
7	$3,857 \cdot x_1 + 0,239 \cdot x_2 + 0,272 \cdot x_3 + 0,258 \cdot x_4 = 0,190$ $0,491 \cdot x_1 + 3,941 \cdot x_2 + 0,131 \cdot x_3 + 0,178 \cdot x_4 = 0,179$ $0,436 \cdot x_1 + 0,281 \cdot x_2 + 4,189 \cdot x_3 + 0,416 \cdot x_4 = 0,753$ $0,317 \cdot x_1 + 0,229 \cdot x_2 + 0,326 \cdot x_3 + 2,971 \cdot x_4 = 0,860.$
8	$4,238 \cdot x_1 + 0,329 \cdot x_2 + 0,256 \cdot x_3 + 0,425 \cdot x_4 = 0,560$ $0,249 \cdot x_1 + 2,964 \cdot x_2 + 0,351 \cdot x_3 + 0,127 \cdot x_4 = 0,380$ $0,365 \cdot x_1 + 0,217 \cdot x_2 + 2,897 \cdot x_3 + 0,168 \cdot x_4 = 0,778$ $0,178 \cdot x_1 + 0,294 \cdot x_2 + 0,432 \cdot x_3 + 3,701 \cdot x_4 = 0,749.$
9	$,389 \cdot x_1 + 0,273 \cdot x_2 + 0,126 \cdot x_3 + 0,418 \cdot x_4 = 0,144$ $0,329 \cdot x_1 + 2,796 \cdot x_2 + 0,179 \cdot x_3 + 0,278 \cdot x_4 = 0,297$ $0,186 \cdot x_1 + 0,275 \cdot x_2 + 2,987 \cdot x_3 + 0,316 \cdot x_4 = 0,529$ $0,197 \cdot x_1 + 0,219 \cdot x_2 + 0,274 \cdot x_3 + 3,127 \cdot x_4 = 0,869.$

k	$\hat{\alpha}_1^k$	$\hat{\alpha}_2^k$	$\hat{\alpha}_3^k$	$\hat{\alpha}_4^k$	R_1	R_2	R_3	R_4
0	0,1401	0	0	0	0,1401	0,0623	0,0550	0,0418
1	0	0,0623	0	0	0	0,0623	0,0579	0,0504
2	0	0	0,0550	0	-0,0034	0	0,0550	0,0439
3	0	0	0	0,0418	-0,0123	-0,0152	0	0,0418
4	0	-0,0185	0	0	-0,0126	-0,0185	-0,0048	0
5	-0,0115	0	0	0	-0,0115	0	-0,0039	0,0019
6	0	0,0031	0	0	0	0,0031	-0,0030	0,0021
7	0	0	-0,0031	0	-0,0002	0	-0,0031	0,0018
8	0	0	0	0,0019	0,0003	0,0009	0	0,0019
9	0	0,0007	0	0	0,0003	0,0007	-0,0002	0

Суммируя все приращения $\hat{\alpha}_i^k$, найдем значения корней:

$$x_1 = \sum_{k=0}^9 \hat{\alpha}_1^k = 0,1401 - 0,0115 = 0,1286,$$

$$x_2 = \sum_{k=0}^9 \hat{\alpha}_2^k = 0,0623 - 0,0185 + 0,0031 + 0,0007 = 0,0477,$$

$$x_3 = \sum_{k=0}^9 \hat{\alpha}_3^k = 0,0550 - 0,0031 = 0,0519,$$

$$x_4 = \sum_{k=0}^9 \hat{\alpha}_4^k = 0,0418 + 0,0019 = 0,0437.$$

2.3.3. Варианты заданий

№	Система уравнений
1	$4,003 \cdot x_1 + 0,207 \cdot x_2 + 0,519 \cdot x_3 + 0,281 \cdot x_4 = 0,425$ $0,416 \cdot x_1 + 3,273 \cdot x_2 + 0,326 \cdot x_3 + 0,375 \cdot x_4 = 0,021$ $0,297 \cdot x_1 + 0,351 \cdot x_2 + 2,997 \cdot x_3 + 0,429 \cdot x_4 = 0,213$ $0,412 \cdot x_1 + 0,194 \cdot x_2 + 0,215 \cdot x_3 + 3,628 \cdot x_4 = 0,946.$
2	$2,591 \cdot x_1 + 0,512 \cdot x_2 + 0,128 \cdot x_3 + 0,195 \cdot x_4 = 0,159$ $0,203 \cdot x_1 + 3,469 \cdot x_2 + 0,572 \cdot x_3 + 0,162 \cdot x_4 = 0,280$ $0,256 \cdot x_1 + 0,273 \cdot x_2 + 2,994 \cdot x_3 + 0,501 \cdot x_4 = 0,134$ $0,381 \cdot x_1 + 0,219 \cdot x_2 + 0,176 \cdot x_3 + 5,903 \cdot x_4 = 0,864.$

$$\begin{cases} R_1^1 = 0 \\ R_2^1 = R_2^0 - 0,2682\delta x_1^0 = 0,0999 - 0,2682 \cdot 0,1401 = 0,0623 \\ R_3^1 = R_3^0 - 0,0803\delta x_1^0 = 0,0692 - 0,0803 \cdot 0,1401 = 0,0579 \\ R_4^1 = R_4^0 - 0,0162\delta x_1^0 = 0,0527 - 0,0162 \cdot 0,1401 = 0,0504 \end{cases}$$

Аналогично находим максимальную по модулю невязку $R_2^1 = 0,0623$ и соответствующей неизвестной x_2^1 дадим приращение $\delta x_2^1 = R_2^1 = 0,0623$.

Тогда $R_2^2 = 0$, а остальные невязки пересчитаем по формуле $R_i^2 = R_i^1 + \bar{a}_{i,2}\delta x_2^1$ ($i \neq 2$), получим

$$\begin{cases} R_1^2 = R_1^1 - 0,0552\delta x_2^1 = 0 - 0,0552 \cdot 0,1375 = -0,0034 \\ R_2^2 = 0 \\ R_3^2 = R_3^1 - 0,0468\delta x_2^1 = 0,0805 - 0,0468 \cdot 0,1375 = 0,0550 \\ R_4^2 = R_4^1 - 0,0162\delta x_2^1 = 0,0550 - 0,0162 \cdot 0,1375 = 0,0439 \end{cases}$$

Снова находим максимальную по модулю невязку $R_3^2 = 0,0550$ и соответствующей неизвестной x_3^2 дадим приращение $\delta x_3^2 = R_3^2 = 0,0550$.

Тогда $R_3^3 = 0$, а остальные невязки пересчитаем по формуле $R_i^3 = R_i^2 + \bar{a}_{i,3}\delta x_3^2$ ($i \neq 3$), получим

$$\begin{cases} R_1^3 = -0,0123 \\ R_2^3 = -0,0152 \\ R_3^3 = 0 \\ R_4^3 = 0,0418 \end{cases}$$

Процесс заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равняться 0 с заданной точностью.

Для достижения точности $\varepsilon = 0,001$ приближения будем находить до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$R_i^i \leq 0,001, i = \overline{1,4}.$$

Все вычисления занесем в таблицу.

Лабораторная работа №3. «РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

3. Лабораторная работа №3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Численные методы решения нелинейных уравнений

3.1.1. Локализация корней

Будем рассматривать задачу приближенного нахождения нулей функции одной переменной

$$f(x) = 0, \quad (3.1)$$

где $f: R_1 \rightarrow R_1$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Теорема 1 (Больцано–Коши). Если непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ на концах его имеет противоположные знаки, т. е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \quad (3.2)$$

то на интервале (a, b) она хотя бы один раз обращается в ноль.

Слабость теоремы:

1. Не дает ответа на вопрос о количестве корней на $[a, b]$ в случае выполнения условия (3.2).

2. Если условие (3.2) не выполнено, то не позволяет утверждать, что корней на $[a, b]$ нет.

Усиление теоремы.

Теорема 2. Непрерывная, строго монотонная функция $f(x)$ имеет и при том единственный ноль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Установить монотонность на данном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянства ее производной на всем отрезке.

Теорема 3. Пусть $f \in C^1[a; b]$, тогда если $f'(x)$ не меняет знак на интервале (a, b) , то условие (3.2) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (3.1) имело и при этом единственный корень на отрезке $[a, b]$.

3.2.3. Варианты заданий

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$f(x) = \sqrt{x} - x^{-1} \ln x + 4 - 1,5$	16	$f(x) = \exp(-0,5x) - 0,2x^2 + 1$
2	$f(x) = \cos x - \exp(-x) + 0,5$	17	$f(x) = \exp(-0,4x^2) - 0,5x^2 + 1$
3	$f(x) = 1,5 - 0,4\sqrt{x^2} - 0,5 \ln x$	18	$f(x) = 1,5 - 0,4\sqrt{x^2} - e^{-x^2} \sin x$
4	$f(x) = 2 - \sqrt{x^2} - 2 \ln x$	19	$f(x) = 2 - 0,5x^2 - 0,5x^{-1} \sin x - x$
5	$f(x) = 1 - 0,5x^2 \ln x + 0,3\sqrt{x}$	20	$f(x) = 0,3 \exp(x) - \cos^2 x + 2$
6	$f(x) = 1 - x \ln x + 0,3\sqrt{x}$	21	$f(x) = 0,5 \exp(-x^2) + x \cos x$
7	$f(x) = 3 - 0,5\sqrt{x} - \exp(-0,5x^2)$	22	$f(x) = \cos^2 x - 0,8x^2$
8	$f(x) = 3 - \sqrt{x^2} + 0,5 \ln x$	23	$f(x) = 1 + \exp(-\sqrt{x}) - \ln(x)$
9	$f(x) = 0,3 \exp(-0,7\sqrt{x}) - 2x^2 + 4$	24	$f(x) = x \ln x - \exp(-0,5x^2)$
10	$f(x) = 0,5 \exp(-\sqrt{x}) - 0,2\sqrt{x^2} + 2$	25	$f(x) = \sin(0,5x) + 1 - x^2$
11	$f(x) = \exp(-0,7x) - 0,3\sqrt{x} + 1$	26	$f(x) = \cos(0,5x) - 0,4 \ln x$
12	$f(x) = 3 - \sqrt{x} - 0,5 \ln x$	27	$f(x) = \exp(-0,3x^2) - \sqrt{x} + 1$
13	$f(x) = 0,2 \exp(-x^2) - \sqrt{x} + 3$	28	$f(x) = \cos^2 x - 0,1 \exp(x)$
14	$f(x) = 0,3 \cos^2 x - \ln x + 2$	29	$f(x) = x^2 - \exp(-x^2)$
15	$f(x) = \exp(-0,5x^2) - x^3 + 0,2$	30	$f(x) = x - \sin x - 0,25$

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	
1	-0,533 922	0,136 050	0,466 078
2	-0,494 503	0,000 114	0,039 419
3	-0,494 468	0	0,000 034
4	-0,494 468	0	0

На четвертой итерации достигаем необходимой точности $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

5) Метод хорд

Построим итерационный процесс метода хорд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	-1,000 000	1,000 000
2	-0,275 321	-0,586 855	0,275 321
3	-0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	-0,457 842	-0,117 435	0,208 561
5	-0,488 924	-0,018 319	0,031 081
6	-0,494 668	0,000 663	0,005 744
7	-0,494 467	-0,000 004	0,000 201
8	-0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

3) Метод секущих

Построим итерационный процесс метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}.$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	-1,000 000	1,000 000
2	-0,275 321	-0,586 855	0,275 321
3	-0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	-0,457 842	-0,117 435	0,208 561
5	-0,488 924	-0,018 319	0,031 081
6	-0,494 668	-0,000 663	0,005 744
7	-0,494 467	-0,000 004	0,000 201
8	-0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

4) Метод «лоцмана»

Построим итерационный процесс метода «лоцмана»

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	
1	-0,642 524	0,564 968	0,357 476
2	-0,512 074	0,059 462	0,130 450
3	-0,494 742	0,000 910	0,017 331
4	-0,494 468	-0,000 001	0,000 274
5	-0,494 468	0	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $|x_5 - x_4| \leq 10^{-4}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

2) Метод Стеффенсена

Построим итерационный процесс метода Стеффенсена

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon = 10^{-4}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	
1	0,023 821	-1,022 985	1,023 821
2	-0,262 973	-0,612 266	0,286 794
3	-0,419 295	-0,232 177	0,156 322
4	-0,483 759	-0,035 206	0,064 464
5	-0,494 219	-0,000 827	0,010 461
6	-0,494 468	-0,000 000 5	0,000 249
7	-0,494 468	0	0

На седьмой итерации достигаем необходимой точности $|x_7 - x_6| \leq 10^{-4}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

3. Найдем с точностью 10^{-4} корень уравнения методом Ньютона.

Вычислим вторую производную функции:

$$f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x, \quad f''(x) = 4 - 6x - e^x.$$

Возьмем начальное приближение $x_0 = -1$, так как $f(-1)f'(-1) > 0$.

Образуем итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^2 - x_n^3 - e^{x_n}}{4x_n - 3x_n^2 - e^{x_n}}.$$

Выполняем вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 10^{-4}$.

Расположим все вычисления в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,000 000	2,632 121	-7,367 879	
1	-0,642 757	0,565 981	-4,336 281	0,357 243
2	-0,512 235	0,060 018	-3,435 251	0,130 522
3	-0,494 764	0,000 982	-3,323 145	0,017 471
4	-0,494 468	0,000 000 3	-3,321 266	0,000 295
5	-0,494 468	0	-3,321 266	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $|x_5 - x_4| \leq 10^{-4}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0,494 468$.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-4} .

1) *Разностный метод Ньютона с постоянным шагом*

Построим итерационный процесс разностного метода Ньютона с постоянным шагом $h = 0,001$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 10^{-4}$.

Сведем все вычисления в таблицу.

Тогда $q = \max_{x \in [-1, 0]} |\phi'(x)| = \phi'(-1) = 0,84 < 1$. Возьмем за x_0 левый конец отрезка -1 . Вычисления будем выполнять до выполнения условия

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q}{1-q} \varepsilon = \frac{0,84}{1-0,84} 0,001 \approx 0,0002.$$

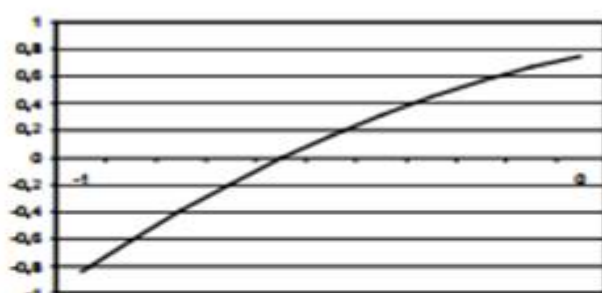


Рис. 3.6. График производной функции $\phi(x)$

Выполним первую итерацию

$$x_1 = \phi(x_0) = \frac{4x_0 + 2x_0^2 - x_0^3 - \varepsilon^2}{4} = -0,3420.$$

Вычисления занесем в таблицу.

n	x_n	$\phi(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-1,0000	-0,3420	
1	-0,3420	-0,4511	0,6580
2	-0,4511	-0,4856	0,1091
3	-0,4856	-0,4929	0,0345
4	-0,4929	-0,4942	0,0073
5	-0,4942	-0,4944	0,0013
6	-0,4944	-0,4945	0,0002

Поскольку $|x_n - x_{n-1}| \leq 0,0002$, считаем, что корень уравнения $x' \approx -0,494$ с точность $\varepsilon = 0,001$.

Уравнение имеет один действительный корень на отрезке единичной длины $x \in [-1; 0]$.

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточним корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Для этого предварительно найдем $f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$. Нарисуем график полученной функции на отрезке $x \in [-1; 0]$ (рис. 3.5).

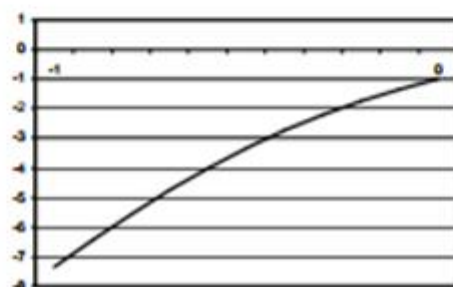


Рис. 3.5. График производной функции $f(x)$

Отсюда находим $Q = \max_{x \in [-1; 0]} |f'(x)| = f'(-1) = 7,36$.

Выберем k , удовлетворяющее условию (3.16). Так как $f'(x) < 0$ на отрезке $x \in [-1; 0]$, следовательно, выберем $k = -4$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4x + 2x^2 - x^3 - e^x}{4}.$$

Найдем производную функции $\varphi(x)$ и построим график этой функции на отрезке $x \in [-1; 0]$ (рис. 3.6).

$$\varphi'(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4 + 4x - 3x^2 - e^x}{4}.$$

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточните корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0,001$.

3. Найдите с точностью 10^{-4} корень уравнения методом Ньютона.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-4} .

Метод по вариантам:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 – разностный метод Ньютона с постоянным шагом,

2, 7, 12, 27, 22, 27, 32 – метод Стеффенсена,

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33 – метод секущих,

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 – метод «лоцмана»,

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 – метод хорд.

3.2.2. Решение типового примера

1. Локализуем корень уравнения $f(x) = 2x^2 - x^3 - e^x = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

Преобразуем уравнение к виду $2x^2 - x^3 = e^x$, и построим графики полученных функций (рис. 3.4).

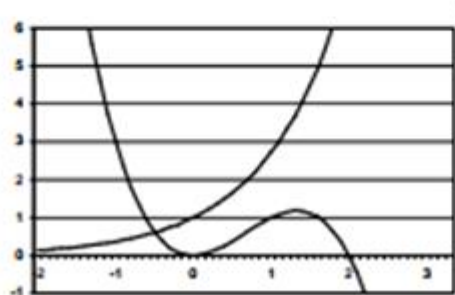


Рис. 3.4. Графическая локализация корня уравнения

Если эта последовательность сходящаяся, т. е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, то, переходя к пределу в уравнении (3.14), получим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})$.

Предполагая $\varphi(x)$ непрерывной, получим

$$x^* = \varphi(x^*). \quad (3.15)$$

Теорема (о простых итерациях). Пусть $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a; b]$, причем все ее значения принадлежат $[a; b]$. Тогда, если $\exists q$ – правильная дробь: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то при $a < x < b$:

1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a; b]$;

2) предельное значение $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на $[a; b]$.

Погрешность метода: Метод итераций обеспечивает на n -м шаге абсолютную погрешность приближения к корню уравнения (3.1), не превосходящую длины n -го отрезка, умноженной на дробь

$$\frac{q}{1-q} : |x^* - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, \text{ где } q = \max_{x \in [a; b]} |\varphi'(x)|.$$

Чтобы функция $\varphi(x)$ обеспечивала сходимость последовательности (3.14), она должна иметь вид

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \quad (3.16)$$

где $|k| \geq \frac{Q}{2}$, $Q = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|$, знак k совпадает со знаком $f'(x)$ на $[a; b]$.

3.2. Пример выполнения лабораторной работы

3.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуите корень уравнения $f(x) = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

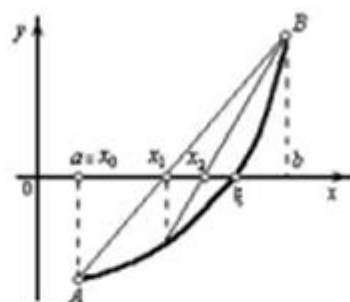


Рис. 3.3. Метод хорд

Выбираем две новые точки таким образом, чтобы на данном отрезке выполнялось условие (3.2).

Опять ищем пересечение с осью Ox , то есть $x_2 = x|_{y=0}$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

И так далее.

Пусть на n -м шаге выполнено условие $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$.

Итерационный процесс метода хорд можно записать:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}). \quad (3.11)$$

3.1.8. Метод простой итерации

Пусть решается уравнение $f(x) = 0$. Заменяем его равносильным

$$x = \varphi(x). \quad (3.12)$$

Выберем начальное приближение x_0 и подставим в правую часть уравнения (3.12) и получим $x_1 = \varphi(x_0)$. (3.13)

Подставляя в правую часть уравнения (3.13) x_1 вместо x_0 получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

3.1.6. Задача «слоцмана»

Наряду с уравнением $f(x) = 0$ рассмотрим уравнение $e^{kx} f(x) = 0$.

Тогда у $\Phi(x) = e^{kx} f(x)$ корни совпадают с корнями функции $f(x)$.

$$\Phi'(x) = e^{kx} [kf'(x) + f'(x)],$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{kf'(x_n) + f'(x_n)}, \quad (3.9)$$

Идея метода: Используем свободный параметр k для повышения скорости сходимости процесса Ньютона.

Так как x^* – корень, заранее известное точное решение, то на каждой итерации можно принять $k = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}$. Тогда из (3.9) следует,

что

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f''(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}. \quad (3.10)$$

Итерационный процесс метода «слоцмана» (3.10) в окрестности корня имеет кубическую скорость сходимости (при условии выполнения необходимых условий метода Ньютона). К недостаткам формулы (3.10) можно отнести наличие второй производной.

3.1.7. Метод хорд

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a; b]$ и выполняется условие (3.2). Запишем уравнение прямой через две точки – уравнение хорды, где $x_0 = a$ и $x_1 = b$.

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Рассмотрим пересечение хорды с осью Ox , получим точку x_2 .

3.1.4. Метод Стеффенсена

Если учесть, что функция $f(x_n) \rightarrow 0$ с той же скоростью, что и $x_n \rightarrow x^*$, то есть смысл полагать, что $h_k = f(x_n)$. Это можно сделать на той стадии итерационного процесса, когда значения функции $|f(x_n)|$ уже достаточно малы. При таких h_k итерационный процесс принимает вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \quad (3.7)$$

Метод имеет сугубо локальный характер сходимости, но зато сходимость квадратичная.

3.1.5. Метод секущих

Пусть в (3.6) $h_k = x_{n+1} - x_n$, тогда $x_{n+1} = x_n + h_k$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}, \quad (3.8)$$

где x_0 и x_1 задаются.

Формула (3.8) определяет новый метод как двухшаговый.

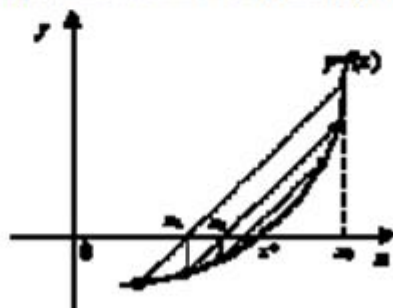


Рис. 3.2. Метод секущих

Из геометрических соображений легко понять, что x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения с осью Ox прямой, проведенной через точки $(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$ и $(x_n; f(x_n))$, т. е. секущей.

4. Начальное приближение $x_0 : f(x_0)f'(x_0) > 0$.

Теорема. При выполнении необходимых условий 1–4, итерационный процесс Ньютона (3.3) сходится к решению x^* уравнения (3.1) с квадратичной скоростью в окрестности корня x^* .

3.1.3. Модификации метода Ньютона

I. Разностный метод с постоянным шагом.

Пусть для $f(x) = 0$ построен итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Для сложных функций вычисление $f'(x)$ достаточно трудоемко, поэтому заменим в (3.4) производную по определению

$$f'(x_*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}.$$

При малых значениях шага h получим приближенное равенство

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}. \quad (3.5)$$

II. Разностный метод с переменным шагом.

Шаг h можно изменять на каждой итерации либо проводить несколько итераций с одним шагом, затем его изменить (в зависимости от свойств функции). Тогда получим набор h_1, h_2, \dots

Тогда (3.5) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h_n}{f(x_n + h_n) - f(x_n)}, \quad n \neq k. \quad (3.6)$$

Преимуществом методов этой группы является отсутствие производной. Недостатком – низкая скорость сходимости.

3.1.2. Метод Ньютона

Рассмотрим $f(x) = 0$ и построим итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Запишем уравнение касательной в точке x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем точку пересечения касательной с осью абсцисс:

$$y = 0, \text{ тогда } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Затем проводим касательную в x_1 и находим x_2 и так далее.

Поэтому метод Ньютона так же называют методом касательных.

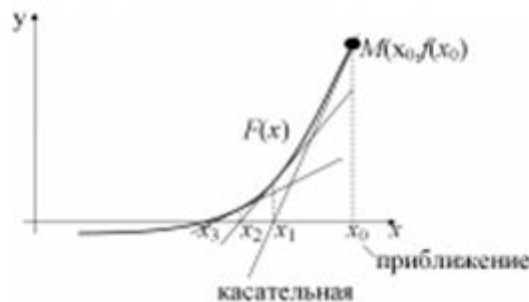


Рис. 3.1. Метод Ньютона (касательных)

Необходимые условия сходимости метода Ньютона:

1. Функция $f(x)$ должна быть дважды дифференцируема и непрерывна, должна иметь непрерывную первую производную, а $|f'(x)| < M$.
2. $f'(x) \neq 0$ на всем промежутке, содержащем корень $\forall x \in [a, b]: x^* \in [a, b]$.
3. $f''(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, $f''(x) < 0$ – функция выпукла вверх, $f''(x) > 0$ – функция выпукла вниз.