

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКА

СОГЛАСОВАНО

Руководитель образовательной программы

_____/ Нальгиева М. А.
от « 21 » 05 2024г.

УТВЕРЖДАЮ

Декан физико-математического факультета

_____/ Кульбужев Б. С.
от « 21 » 05 2024г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики»
(индекс дисциплины по учебному плану, наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки –
03.03.02 Физика
(код, наименование)

Направленность: **Физика**

Квалификация выпускника – *бакалавр физики*

Форма обучения очная

Магас, 2024

Фонд оценочных средств по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики» включает все виды оценочных средств, позволяющих проконтролировать освоение обучающимися профессиональных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций, предусмотренных Федеральным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 03.03.02_ Физика (квалификация «Бакалавр») и рабочей программой дисциплины «Линейные и нелинейные уравнения физики».

Назначение фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) составляется в соответствии с требованиями ФГОС ВО для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики» на соответствие их учебных достижений поэтапным требованиям соответствующей основной профессиональной образовательной программы (ОПОП). ФОС является составной частью рабочей программы дисциплины.

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики» включает в себя: перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП; описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания; типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения ОПОП; методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Фонд оценочных средств сформирован на основе ключевых принципов оценивания:

- валидности: объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;
- надежности: использование единообразных стандартов и критериев для оценивания достижений;
- объективности: разные студенты должны иметь равные возможности добиться успеха.

Основными параметрами и свойствами ФОС являются:

- предметная направленность (соответствие предмету изучения конкретной учебной дисциплины);
- содержание (состав и взаимосвязь структурных единиц, образующих содержание теоретической и практической составляющих учебной дисциплины);
- объем (количественный состав оценочных средств, входящих в ФОС);
- качество оценочных средств и ФОС в целом, обеспечивающее получение объективных и достоверных результатов при проведении контроля с различными целями.

ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ ДИСЦИПЛИНОЙ

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения	Знать теоретические основы, основные понятия, законы и модели основных разделов физики; Уметь понимать, излагать и критически анализировать физическую информацию.

		<p>поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.</p>	<p>Пользоваться теоретическими основами, законами и моделями физики; Владеть физическими и математическими методами обработки и анализа информации в области основных разделов физики.</p>
ПК-3	<p>ПК-3. Способность использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин</p>	<p>ПК-3.1. Способен оценить актуальность решаемой задачи на основе анализа научно-технической литературы и информационных материалов по тематике исследования. ПК-3.2. Способен подготовить исходные данные для математического описания физики процесса в заданной физической системе с учетом ее назначения и элементной (электронной, оптической) базы. ПК-3.3. Способен адекватно применить математический инструментарий при</p>	<p>Знать основы математического анализа, теории функций комплексной переменной, аналитической геометрии и линейной алгебры, векторного и тензорного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, вариационного исчисления, теории вероятностей и математической статистики Уметь использовать математический аппарат для освоения теоретических основ и практического использования физических методов Владеть навыками</p>

		формулировке моделирующих физический процесс уравнений.	использования математического аппарата для решения физических задач
--	--	---	---

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

- 1.самоконтроль и самооценка обучающегося;
- 2.контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в том числе электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Вести конспект лекций. Лекции ведутся в отдельной общей тетради, рекомендуется оставлять место для заметок, например, в виде полей. Знание основного материала предыдущих лекций, включая знание основных определений и ключевых теорем. Рекомендуется выделять в тексте ключевые слова, определения, леммы и теоремы.

практические занятия	<p>В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, лекции. Внимательно слушать и конспектировать базовые примеры, разбираемые преподавателем. Задавать уточняющие вопросы в ходе решения базовых задач преподавателем. При решении домашних заданий периодически возвращаться к разобранным на практических занятиях задачам. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу.</p> <p>Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, непредставленными в списке рекомендованной литературы.</p>
самостоятельная работа	<p>Самостоятельная работа ведется в той же тетради, что и практические занятия. Самостоятельная работа - это отдельный блок который выделяется заголовком, например, "Домашнее задание". Рекомендуется прорабатывать материал непосредственно после практических занятий. При решении задач и примеров рекомендуется их выполнение по образцу из практического занятия. Своевременно и полностью решать задачи на самостоятельную работу. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Задавать вопросы в тех местах решения задач, вызвавших затруднение при самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы</p>
экзамен	<p>Подготовка к экзамену или зачету ведется на основе курса лекций или рекомендованной литературы. Необходимо знание и понимание всех понятий, определений, утверждений, лемм и теорем. Необходимо умение формулировать теоремы в форме непротиворечивых логических конструкций. Желательной уметь строить и приводить примеры к соответствующим определениям и утверждениям. Необходимо знание доказательства теорем и остальных утверждений.</p>

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$2u_{x_1x_2} + uu_{x_1x_1} - 3x_1x_2u_{x_1} + u_{x_2} - 3u = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$\sin(x_1+1)u_{x_1x_1} - u_{x_1}u_{x_2} + 3u^2 + x_1x_2^2 + 2 = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$u_{x_1x_2} + \sin u_{x_1x_1} + u_{x_1} + 2u_{x_2} + 3u_{x_1} = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$x_1^2 u_{x_1x_2} - u^2 u_{x_2} + x^3 u_{x_1} + 2u_{x_1} - 3 = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$\sqrt{x_1^2 - x_2^2} u_{x_1x_2} + 2u_{x_1x_2} - 3u^2(u_{x_2} - 1) - x_1 = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$(x_1 + x_3^2)u_{x_1x_2} + u_{x_1x_1} - u_{x_2x_3} + u_3 - x_3^4 = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$u_{x_1x_2x_3} - u_{x_1} u_{x_1x_2} - u_{x_2} + uu_{x_1} - x_2 = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$u_{x_1x_2} - uu_{x_2x_2} + x_1 u_{x_1x_2x_3} - 4uu_{x_2} = 0,$$

Задание 1. Установите, является ли уравнение нелинейным, квазилинейным или линейным (однородным или неоднородным).

$$u u_{x_1x_2} + u_{x_1x_2} u_{x_2x_3} - x_2^2 u_{x_1x_2x_3} - 2u - x_1 = 0,$$

Задание 2. Определите тип уравнения (см. пример 2)

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + c_0u + f(x_1, x_2) = 0$$

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	b_1	b_2	c_0	$f(x_1, x_2)$
1	x_2^3	0	1	-1	2	-1	$x_1x_2^2$
2	x_1	0	x_2	-2	3	1	3
3	x_2	0	$-x_1$	x_1x_2	0	-1	x_2
4	1	0	$-x_2$	1	$-x_1^2$	1	-4
5	1	0	$-x_1$	x_1	x_1	x_2	1
6	0	x_1	$-2x_2$	$-x_1$	1	0	$3x_2 - x_1$
7	$1 + x_1^2$	$0,5(1 + x_2^2)$	0	0	x_2	0	0
8	x_2^2	0	x_1^2	$-4x_1$	x_2	-1	x_1
9	1	0	x_1^2	$3x_1$	$4x_2$	1	x_2
10	$1 + x_1^2$	0	1	$3x_1$	x_2^2	-1	x_1
11	1	x_1x_2	x_2^2	-1	2	0	0
12	1	0	x_1x_2	x_1^2	1	-3	$4x_1$
13	1	1	x_2	3	$-x_2$	4	x_1x_2

14	1	$\sin x_1$	$\sin^2 x_1 - \cos^2 x_1$	$\cos^2 x_1$	0	0	1
15	1	0	$-1 - x_2^2$	x_1^2	x_1	1	$-4x_1 + 5$
16	$x_1 x_2^2$	$-x_1^2 x_2$	x_1^3	x_1^2	1	0	$4x_1$
17	$\cos x_2^2$	$x_1 x_2$	x_1^2	$-2x_1 x_2$	0	1	$e^{x_1 x_2}$
18	x_2	$\sin x_2$	-1	0	$\sin^2 x_2$	1	0
19	x_2	0	x_1	2	-3	-4	$5x_1$
20	$x_1 x_2^2$	x_1^2	x_1^3	0	$-x_1^4$	1	$x_1 - 1$
21	x_1	x_1	$x_1 - 1$	1	x_2^2	1	0
22	x_2	1	-2	3	x_2	1	0
23	x_2	$x_1 x_2$	$x_1 - 1$	$x_1 x_2$	1	0	x_1
24	1	$\sqrt{x_1}$	x_2	$-\sqrt{x_2}$	$-x_{12}$	-1	0
25	$x_1 x_2^2$	$-0,5x_1^2 x_2$	x_2^3	x_1^4	x_2^2	1	0
26	x_1	$-\sqrt{x_2}$	0	1	3	0	$1 - x_1 x_2$
27	0	1	$-x_1$	x_1^2	$x_1 x_2$	1	$-4x_1$
28	x_2	0,5	0	$3x_1$	4	$2x_1$	$1 - 4x_1$
29	1	$-x_1$	4	5	0	31	$4 + x_1$
30	2	$-3x_2$	2	x_1	x_2^3	0	$-4x_1$

Задание 3. Приведите к каноническому виду уравнение (см. пример 3)

$$a_{11}u_{x_1 x_1} + 2a_{12}u_{x_1 x_2} + a_{22}u_{x_2 x_2} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} = 0.$$

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	b_1	b_2
1	2	2	2	1	1
2	1	-3	6	4	-3
3	1	2,5	8	-1	2
4	4	4	9	2	2
5	2	4	4	-1	-3
6	2	-4	4	1	3
7	2	2	2	1	1
8	16	-4	1	2	3
9	1	6	8	-1	5
10	4	-4	4	5	1
11	25	5	1	-1	4
12	-4	3	-5	1	-4
13	25	-4	1	-1	3
14	2	-3	9	1	4
15	1	-1	2	4	-1
16	4	2	3	4	3
17	4	2	1	-1	1

18	2	3	3	4	-2
19	3	2	4	-1	-1
20	1	1	2	1	-2
21	3	-4	7	1	-5
22	3	1	1	1	3
23	5	3	1	-2	-2
24	3	2	1	-1	-2
25	1	3	3	1	-3
26	3	-6	10	6	1
27	2	3	1	-1	1
28	1	4	8	1	4
29	36	-6	1	-2	2
30	5	5	9	1	1

Задание 4. Приведите к каноническому виду и найдите общее решение уравнения (см. примеры 3, 4 и 5)

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} = 0.$$

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	b_1	b_2
1	4	4	1	-2	-1
2	-2	-5	1	1	3
3	1	6	9	1	3
4	25	-10	1	-25	5
5	1	-4	4	5	-10
6	1	-12	36	-3	18
7	36	12	1	6	1
8	1	2	1	1	1
9	1	3	2	6	1
10	1	-4	4	5	-10
11	9	-6	1	6	-2
12	1	8	16	4	-16
13	25	-1	1	-10	2
14	16	8	1	20	5
15	1	12	36	3	18
16	1	-14	49	-4	14
17	-2	-5	3	1	3
18	1	10	25	4	20
19	1	6	9	-3	-9
20	4	-4	1	-6	3
21	1	4	4	4	8
22	1	-2	-6	6	0
23	9	6	8	15	5
24	1	8	16	-2	-8
25	25	10	1	5	1
26	1	-2	1	-6	6
27	9	6	1	3	1
28	16	8	1	4	1
29	1	-8	1	-12	3
30	36	-12	1	-12	2

Задание 5. Используя формулу Даламбера, найдите решение задачи Коши (см. пример 7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

№	a^2	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
1	4	$\frac{x+1}{x^2+2x+3}$	$\cos^2 x$
2	9	$\frac{1}{3x^2+x+1}$	$\cos x \sin^2 x$
3	16	$\sin 2x$	$\frac{x+1}{x^2+3x+3}$
4	4	$\frac{x+1}{x^2+2x+5}$	$\sin^2 x$
5	1	$e^{-x^2} \sin^2 x$	$\frac{3x+1}{4x^2+2x+3}$
6	9	$\sin^2(x+1)$	$\frac{x-1}{x^2-2x+3}$
7	25	$\frac{2x+1}{2x^2-2x+3}$	$\sin^3 x$
8	16	$\frac{x+3}{x^2-x+3}$	$\cos^3 x$
9	4	$\frac{\sin^2 x}{2x^2-x+2}$	$\frac{x+1}{x^2-3x+4}$
10	25	$\frac{x+1}{3x^2-x+3}$	$\sin 2x$
11	4	$\frac{x}{x^2+2x+3}$	$\sin 3(x+1)$
12	1	$\sqrt{1+\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^2-2x+3}$
13	4	$\frac{2x+1}{x^2-2x+3}$	xe^{-x^2}
14	9	$\sin^3 x$	$\frac{4}{x^2+2x+2}$
15	16	$\frac{x+3}{x^2+3x+3}$	$\cos x \sin^3 x$
16	25	$\frac{x}{2x^2+1}$	$\sin^2 \frac{x}{2}$

17	16	$\frac{2}{x^2 + 2x + 5}$	$\sin(x+1)$
18	4	$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$	$\frac{3x}{x^2 + 3}$
19	36	$\frac{\sin x}{x^2 + 2x + 3}$	$\sin^3(x+1)$
20	25	$\frac{\sin^2 x}{x^2 + 2}$	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$
21	1	$e^{-\frac{x^2}{2}} \sin^2 x$	$\frac{x}{x^2 + 2x + 3}$
22	4	$\frac{\cos x}{x^2 + 2x + 3}$	$\frac{\sin^3 x}{3}$
23	9	e^{-x^2}	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$
24	4	$\sin^2(x+1)$	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$
25	9	$\sqrt{\frac{x+3}{x^2 - x + 3}}$	$\frac{2}{x^2 + 3}$
26	25	$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 - x + 4}$	$\cos x \sin^2 x$
27	16	$\frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$	$\sin x \cos^2 x$
28	25	$\frac{\sin x}{x^2 + 2x + 3}$	$\sin^2 x$
29	4	$e^{-x^2 + x}$	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$
30	9	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$	$\sin^2 x$

Задание 6. Используя формулу Даламбера, найдите решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения на полупрямой (см. пример 8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$\alpha u(x, t) - \beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

№	a^2	α	β	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
1	25	1	0	$\frac{2x}{x^2+3}$	$1-\cos 2x$
2	4	1	0	$\frac{x}{3x^2+1}$	$\cos x-1$
3	16	0	1	$\cos 2x$	$\frac{2}{x^2+3}$
4	4	0	1	$\frac{1}{x^2+5}$	$\cos^2 x$
5	16	1	1	$xe^{-x^2}-\sin x$	$\frac{3x+2}{x^2+1}$
6	9	1	0	$\sin \pi x$	$\frac{x}{x^2-2x+3}$
7	4	1	0	$\frac{x}{2x^2+3}$	$\sin^3 x$
8	16	0	1	$\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$	$1-\cos^3 x$
9	4	0	1	$\frac{2+\sin 2x}{x^2+x+1}$	$\frac{x+2}{3x^2+x+2}$
10	25	1	0	$\frac{x}{3x^2+5}$	$\sin 2x$
11	4	2	1	$\frac{2x+1}{x^2+3}$	$\frac{1}{2}+\sin x$
12	16	1	0	$x \cos x$	$\frac{x}{x^2+3}$
13	4	1	0	$\frac{2x}{x^2+3}$	xe^{-x^2}
14	9	0	1	$\sin^3 x$	$\frac{4}{x^2+2}$
15	1	1	0	$\frac{x \cos x}{x^2+3x+3}$	$\cos x \sin^3 x$
16	9	0	1	$\frac{1}{2x^2+1}$	$\sin^2 \frac{x}{2}$
17	16	1	2	$\frac{2 \sin x+3}{x^2++2x+3}$	$1+2 \sin x$
18	4	1	0	$\frac{x \cos 2x}{x^2+1}$	$\frac{3x}{x^2+3}$
19	36	1	0	$\frac{\sin \pi x}{x^2+3}$	$\sin^3(x+\pi)$

20	25	0	1	$\frac{\cos x}{x^2 + 2}$	$\frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$
21	16	1	0	$e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x$	$\frac{x}{x^2 + 2x + 3}$
22	4	0	1	$\frac{x \cos \pi x}{x^2 + 3}$	$\frac{\sin^3 x}{3}$
23	1	0	1	e^{-x^2}	$\frac{x+3}{x^2 + x + 3}$
24	4	1	0	$x \sin^2 x$	$\frac{x}{x^2 + 3}$
25	9	1	1	$\frac{2x+1}{\sin x + 1}$	$\frac{x+2}{x^2 - x - 1}$
26	25	1	0	$\frac{x}{\ln(x^2 + 2)}$	$\cos x \sin^2 x$
27	16	1	0	$\frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$	$\sin x \cos^2 x$
28	4	0	1	$\frac{\cos x}{x^2 + 1}$	$\sin^2 x$
29	4	0	1	$e^{-x^2 - 1}$	$\frac{x+1}{x^2 + 3x + 3}$
30	9	1	0	$\frac{x}{x^2 + 1}$	$\sin^2 x$

Задание 7. Неограниченная струна имеет на отрезке $[l_1, l_2]$ локальное начальное отклонение $\varphi_0(x)$ и локальную начальную скорость $\varphi_1(x)$ (задача Коши для однородного волнового уравнения на прямой). Найдите формулы, определяющие профиль струны при $t > 0$ (см. пример 9).

№	a^2	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
1	4	$\begin{cases} (1- x)^2, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$	0
2	16	0	$\begin{cases} x-1 -1, & x-1 \leq 1, \\ 0, & x-1 > 1, \end{cases}$
3	9	$\begin{cases} (x -2)^2, & x \leq 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$	0

4	25	0	$\begin{cases} x+1 -1, & x+1 \leq 1, \\ 0, & x+1 >1, \end{cases}$
5	9	$\begin{cases} (3- x)^2, & x \leq 3, \\ 0, & x >3, \end{cases}$	0
6	36	0	$\begin{cases} 2- x-2 , & x-2 \leq 2, \\ 0, & x-2 >2, \end{cases}$
7	15	$\begin{cases} (x+2 -2)^2, & x+2 \leq 2, \\ 0, & x+2 >2, \end{cases}$	0
8	4	0	$\begin{cases} x-1 -2, & x-1 \leq 2, \\ 0, & x-1 >2, \end{cases}$
9	9	$\begin{cases} (x+1 -2)^2, & x+1 \leq 2, \\ 0, & x+1 >2, \end{cases}$	0
10	25	0	$\begin{cases} x -3, & x \leq 3, \\ 0, & x >3, \end{cases}$
11	16	$\begin{cases} (x-2 -1)^2, & x-2 \leq 1, \\ 0, & x-2 >1, \end{cases}$	0
12	4	0	$\begin{cases} x+2 -1, & x+2 \leq 1, \\ 0, & x+2 >1, \end{cases}$
13	36	$\begin{cases} (x-3 -1)^2, & x-3 \leq 1, \\ 0, & x-3 >1, \end{cases}$	0
14	25	0	$\begin{cases} (x+3 -1)^2, & x+3 \leq 1, \\ 0, & x+3 >1, \end{cases}$
15	16	$\begin{cases} (x-1 -3)^2, & x-1 \leq 3, \\ 0, & x-1 >3, \end{cases}$	0
16	9	0	$\begin{cases} 2- x , & x \leq 2, \\ 0, & x >2, \end{cases}$
17	25	$\begin{cases} (x -2)^2, & x \leq 2, \\ 0, & x >2, \end{cases}$	0

18	16	0	$\begin{cases} x-1 -1, & x-1 \leq 1, \\ 0, & x-1 >1, \end{cases}$
19	36	$\begin{cases} (x+2 -1)^2, & x+2 \leq 1, \\ 0, & x+2 >1, \end{cases}$	0
20	4	0	$\begin{cases} x+3 -1, & x+3 \leq 1, \\ 0, & x+3 >1, \end{cases}$
21	9	$\begin{cases} (x+1 -2)^2, & x+1 \leq 2, \\ 0, & x+1 >2, \end{cases}$	0
22	25	0	$\begin{cases} 2- x-2 , & x-2 \leq 2, \\ 0, & x-2 >2, \end{cases}$
23	36	$\begin{cases} (x+2 -2)^2, & x+2 \leq 2, \\ 0, & x+2 >2, \end{cases}$	0
24	16	0	$\begin{cases} 3- x+1 , & x+1 \leq 3, \\ 0, & x+1 >3, \end{cases}$
25	9	$\begin{cases} (x+1 -4)^2, & x+1 \leq 4, \\ 0, & x+1 >4, \end{cases}$	0
26	25	0	$\begin{cases} 3- x+2 , & x+2 \leq 3, \\ 0, & x+2 >3, \end{cases}$
27	16	$\begin{cases} (x+3 -3)^2, & x+3 \leq 3, \\ 0, & x+3 >3, \end{cases}$	0
28	4	0	$\begin{cases} x-2 -3, & x-2 \leq 3, \\ 0, & x-2 >3, \end{cases}$
№	a^2	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
29	9	$\begin{cases} (x-3 -1)^2, & x-3 \leq 1, \\ 0, & x-3 >1, \end{cases}$	0
30	25	0	$\begin{cases} x-3 -2, & x-3 \leq 2, \\ 0, & x-3 >2. \end{cases}$

Задание 8. Найдите решения задачи Штурма – Лиувилля (см. пример 10)

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad l_1 < x < l_2,$$

$$\alpha_1 X(l_1) - \beta_1 X'(l_1) = 0,$$

$$\alpha_2 X(l_2) + \beta_2 X'(l_2) = 0.$$

№	l_1	l_2	α_1	β_1	α_2	β_2
1	1	3	0	1	1	0
2	2	4	1	0	1	1
3	1	2	1	2	2	4
4	2	4	0	1	2	1
5	3	4	1	3	1	2
6	1	3	1	0	1	3
7	2	3	0	1	0	1
8	4	6	0	1	1	0
9	3	4	1	1	2	3
10	1	3	0	1	0	1
11	2	5	1	2	0	1
12	4	5	1	0	1	2
13	1	3	0	1	1	3
14	2	4	1	0	2	1
15	5	6	0	1	1	0
16	3	5	1	3	2	1
17	1	2	2	1	1	0
18	4	5	3	2	0	1
19	2	3	1	0	1	1
20	1	3	2	1	1	0
21	3	2	0	1	1	2
22	2	3	0	1	0	1
23	4	6	3	1	1	2
24	2	3	3	2	1	0
25	1	3	2	1	0	1
26	3	4	1	3	1	2
27	4	6	2	1	2	1
28	2	4	0	1	1	0
29	1	4	2	1	1	1
30	3	4	2	3	0	1

Задание 9. Найдите решения краевой задачи на собственные значения для уравнения Лапласа в прямоугольнике (см. пример 12.)

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \lambda > 0, \quad l_1 < x < l_2, \quad l_3 < y < l_4,$$

$$\alpha_1 u(x, y) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = 0, \quad \alpha_2 u(x, y) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = 0,$$

$$\alpha_3 u(x, y) - \beta_3 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_3} = 0, \quad \alpha_4 u(x, y) + \beta_4 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_4} = 0.$$

№	l_1	l_2	l_3	l_4	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	α_4	β_4
1	1	3	2	3	1	0	0	1	1	2	1	0
2	2	4	3	5	0	1	1	0	1	0	0	1
3	3	4	3	7	1	3	2	3	2	1	1	2

4	2	5	1	4	0	1	1	0	1	3	2	1
5	3	6	2	4	1	3	2	1	0	1	1	0
6	5	6	3	4	1	2	0	1	1	2	2	1
7	2	4	1	4	0	1	1	2	0	1	1	0
8	4	5	1	3	0	1	1	0	1	2	2	1
9	1	4	2	4	1	0	0	1	2	1	1	2
10	3	5	2	5	1	2	1	2	1	2	1	0
11	2	5	3	6	0	1	2	3	0	1	1	0
12	1	5	3	5	1	0	0	1	3	2	2	3
13	2	5	4	5	1	2	1	0	2	1	2	1
14	5	6	2	5	0	1	3	1	0	1	1	0
15	2	3	1	3	0	1	0	1	1	0	1	1
16	2	4	2	3	1	3	2	1	2	1	2	1
17	3	4	3	4	0	1	3	1	0	1	3	1
18	3	5	1	3	1	2	0	1	3	1	2	1
19	4	6	2	5	1	0	1	3	2	3	1	0
20	2	4	1	4	0	1	1	2	2	1	2	1
21	3	5	2	5	1	3	0	1	1	3	1	0
22	4	5	3	6	1	2	1	2	1	2	1	2
23	1	5	2	6	0	1	2	1	0	1	0	1
24	2	5	3	5	1	0	0	1	1	0	0	1
25	5	6	2	5	1	2	3	1	0	1	1	0
26	2	3	1	4	0	1	2	1	2	3	1	2
27	2	3	2	4	2	1	1	2	2	1	2	1
28	3	5	3	5	2	3	0	1	3	1	0	1
29	3	6	2	5	0	1	2	1	0	1	1	2
30	2	3	4	6	3	1	1	0	1	2	1	0

Задание 10. Найдите решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике (пример 13)

$$\Delta u = 0 \quad l_1 < x < l_2, \quad l_3 < y < l_4,$$

$$\alpha_1 u(x, y) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = u_1(y), \quad \alpha_2 u(x, y) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = u_2(y),$$

$$\alpha_3 u(x, y) - \beta_3 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_3} = u_3(x), \quad \alpha_4 u(x, y) + \beta_4 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_4} = u_4(x).$$

№	$u_1(y)$	$u_2(y)$	$u_3(x)$	$u_4(x)$
1	$2y^3 - 6y^2 + 1$	0	0	$\left(\frac{x}{2}\right)^2 (x-1)$
2	$-2y^3 + 9y^2 + 2$	0	$\left(\frac{x-2}{2}\right)x^2$	0
3	$y^2 + 2y$	0	$2x^3 + 9x^2 - 2$	
4	$y^2 + 3y$	0	0	$2x^3 - 6x^2 + 3$
5	0	$2y^3 - 6y^2 - 2$	$\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 x$	0

6	0	$4y^3 + 6y^2 - 4$	0	$x(x+1)^2$
7	0	$y^2 + 2y$	$x^3 + 3x^2 - 4$	
8	$2y^3 - 9y^2 - 3$	0	$x(x-3)$	0
9	0	$y^3 - 3y^2 - 2$	$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 x$	0
10	$y^2 + 3y$	0	0	$2x^3 + 6x - 3$
11	0	$y^2 - 3y$	$2x^3 + 9x + 1$	0
12	$y^2 - 4y$	0	0	$2x^3 - 9x^2 + 3$
13	0	$-3y^3 + 9y^2 + 1$	0	$x^2(x-2)$
14	$2y^3 - 9y^2 - 2$	0	0	$x(x-3)^2$
15	0	$2y^3 + 6y^2 + 3$	$x^2(x+2)$	0
16	$y^2 - 3y$	0	0	$2x^3 - 9x^2 + 4$
17	0	$y^2 - y$	0	$4x^3 + 6x^2 + 1$
18	0	$-3y^3 + 9y^2 - 4$	0	$x^2(x-2)$
19	$y^3 + 6y^2 + 3$	0	$x(x+4)$	0
20	$3 + 48y - y^3$	$y^3 - 48y + 1$	$x(x-2)$	0
21	$2y^3 - 24y + 3$	$-y^3 + 12y + 2$	$x(x-1)$	0
22	$-y^3 + 48y + 5$	$0,5y^3 - 24y - 7$	0	$x(x-2)$
23	$-2y^3 + 24y + 3$	$y^3 - 12y + 1$	0	$3x - x^3$
24	$3y^3 - 9y + 2$	$-y^3 + 3y^2 + 5$	$x(x+2)$	0
25	$y^2 - 3y$	0	$4x^3 - 12x + 3$	$x^3 - 3x + 11$
26	0	$y^2 - 2y$	$x^3 - 27x + 4$	$5 + 27x - x^3$
27	0	$y^2 - y$	$2x^3 - 24x + 1$	$x^3 - 12x + 9$
28	$y^2 + 2y$	0	$x^3 + 27x + 5$	$-x^3 + 27x + 1$
29	$y^2 + y$	0	$4x^3 - 12x + 3$	$2 + 3x - x^3$
30	0	$y^2 + 3y$	$-2x^3 + 24x + 1$	$2 - 12x + x^3$

№	l_1	l_2	l_3	l_4	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	α_4	β_4
1	0	1	0	2	1	0	1	0	0	1	0	1
2	-2	0	0	3	1	0	1	0	0	1	0	1
3	0	2	-2	0	0	1	0	1	1	0	1	0
4	0	3	-3	0	0	1	0	1	1	0	1	0
5	0	2	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
6	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	1	0	1
7	0	2	-2	0	0	1	0	1	1	0	1	0

8	0	3	0	2	1	0	1	0	0	1	0	1
9	0	2	-1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
10	-3	0	-2	0	0	1	0	1	1	0	1	0
11	0	3	-3	0	0	1	0	1	1	0	1	0
12	0	4	0	3	0	1	0	1	1	0	1	0
13	0	2	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
14	0	3	-2	0	1	0	1	0	0	1	0	1
15	-2	0	0	2	1	0	1	0	0	1	0	1
16	-3	0	0	3	0	1	0	1	1	0	1	0
17	0	3	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
18	0	2	-3	0	1	0	1	0	0	1	0	1
19	-4	0	0	3	1	0	1	0	0	1	0	1
20	0	2	-4	4	1	0	1	0	0	1	0	1
21	0	1	-2	2	1	0	1	0	0	1	0	1
22	-2	0	-3	3	1	0	1	0	0	1	0	1
23	0	3	-2	2	1	0	1	0	0	1	0	1
24	-2	0	-1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
25	-1	1	-3	0	0	1	0	1	1	0	1	0
26	-3	3	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0
27	-2	2	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
28	-3	3	-2	0	0	1	0	1	1	0	1	0
29	-1	1	-1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
30	-2	2	-3	0	0	1	0	1	1	0	1	0

Задание 11. Найдите решение краевой задачи для уравнения Лапласа в круге (см. пример 13)

$$\Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 \leq |x| < r_0,$$

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_0} = u_0(x).$$

№	r_0	α	β	$u_0(x)$
1	3	1	0	$2 + \frac{1}{3}x_1 + x_2^2 - \frac{1}{27}x_2^3$
2	3	0	1	$3 + \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{2\pi} \arcsin^2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
3	1	2	1	$1 + \arccos^3 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 4\pi^2 \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
4	2	1	0	$3 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^3 + x_2^2$

5	1	0	1	$4 + x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_2^3$
6	3	1	2	$1 - \pi \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{2} \arccos^2 \frac{x_1}{3}$
7	4	1	0	$2 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1 x_2^2$
8	1	0	1	$1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 + x_2^2$
9	2	1	1	$2 + \frac{4\pi}{3} \arccos \frac{x_1}{2} - \frac{2}{3} \arcsin^2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
10	3	0	1	$1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 + x_2^2$
11	3	1	0	$3 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 - x_2^2$
12	2	3	1	$3 + \frac{3\pi}{2} \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{3}{4} \arccos^2 \frac{x_1}{4}$
13	5	0	1	$4 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 + 3x_2^2$
14	2	1	0	$1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 3x_1^2 - x_2^2$
15	1	1	3	$4 - 1,6\pi \arcsin x_2 + 0,8 \arccos^2 x_1$
16	4	0	1	$1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 + 2x_2^2$
17	2	1	0	$2 + x_1 - x_1^2 x_2^2$
18	5	3	2	$1 + 4\pi \arcsin \frac{x_2}{5} - 2 \arccos^2 \frac{x_2}{5}$
19	3	0	1	$3 + \frac{x_1 - x_1 x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
20	4	1	0	$1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^3 + x_2^2$

21	2	0	1	$3 - \frac{x_1 x_2 + x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
22	1	1	3	$2 - 6\pi \arccos x_1 + 3 \arcsin^2 x_2$
23	5	0	1	$3 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 x_2$
24	3	1	0	$2 + 3x_1 + x_1^2 + x_2^2$
25	2	2	1	$\frac{1}{2} - 8\pi \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 4 \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
26	3	1	0	$4 - \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} + 2x_1^2 + 5x_2^2$
27	4	1	3	$1 - 10\pi \arccos \frac{x_1}{4} + 5 \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
28	2	0	1	$1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^2 x_2$
29	5	1	0	$1 - 2x_1^2 - 3x_2^2$
30	3	1	1	$1 - 3\pi \arcsin \frac{x_2}{3} + \frac{3}{2} \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

Задание 12. Найдите решение краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре (см. пример 15)

$$\Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \leq |x| < r_0,$$

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_0} = u_0(x).$$

№	r_0	α	β	$u_0(x)$
1	2	1	0	$2 + x_1 + 3x_3^3$
2	3	0	1	$2 - 3x_1^3 + x_2 + x_3^2$
3	4	2	1	$1 - 2x_1 - x_2^3 + x_3^2$
4	2	1	0	$1 - 2x_1 x_2^3 + x_3^2$
5	1	1	2	$2 - 2x_1 - x_2 x_3^2$
6	3	0	1	$1 - 2x_1^2 - x_2 + x_3^3$
7	4	1	1	$3 + 2x_1 x_2^2 + x_3^2$

8	1	0	1	$4 + x_1 x_2 + x_2 x_3^2$
9	2	1	1	$2 - 2x_1 - 3x_2^3 + x_1 x_3$
10	3	0	1	$2 + 2x_1^2 x_2 + 4x_3^2$
11	3	1	0	$1 - 3x_1 - 5x_2 x_3^2$
12	2	3	1	$3 - 4x_1 x_2 - x_2^3 + 2x_3^2$
13	5	0	1	$1 + 2x_1 - 3x_2^3 - x_1 x_3^2$
14	2	1	0	$4 - 2x_1^3 - 3x_2^2 + x_3$
15	1	1	3	$4x_1 x_3 - x_2^3 + 2x_3^2$
16	4	0	1	$3 + 2x_1 - x_1 x_2^3 - 4x_3^2$
17	2	1	0	$2x_1 - x_1 x_2 + 3x_3^3$
18	5	3	2	$3x_1 - x_2^3 + x_1 x_3^2$
19	3	0	1	$2x_1 x_2 - x_2^3 + x_1 x_3^2$
20	4	1	0	$2x_1 - x_2^3 + x_2 x_3$
21	2	2	3	$3 - 2x_1 x_3 - x_2^3 + x_3$
22	1	1	0	$1 + 4x_1 - x_2^3 x_3 - 2x_3^2$
23	5	0	1	$2x_1 x_3 - 3x_2^3 + 4x_3^2$
24	3	1	1	$1 + 3x_1 - x_1 x_2^2 + x_3^2$
25	2	0	1	$3 + 2x_1 + 3x_2^2 - 4x_3^3$
26	3	1	3	$2 - 3x_1 + 2x_2^3 + 2x_1 x_3$
27	4	1	0	$1 - 2x_1^2 x_3 - x_2^3 + x_3$
28	2	0	1	$1 + 3x_1 - 2x_2^2 + 3x_3^3$
29	5	3	1	$3x_1 x_2^2 - 2x_2^3 - x_3^2$
30	3	1	0	$3 + 2x_1 + 3x_1 x_2^2 + x_3^2$

Задание 13. Найдите решение краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндре (пример16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad |x| < r_0, \quad 0 < z < l,$$

$$u(x, z) \Big|_{|x|=r_0} = u_0(z) = az^3 - bz^2 + c, \quad 0 < z < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=l} = 0.$$

№	k^2	r_0	l	a	b	c
1	3	2	1	2	-3	3
2	4	1	2	1	-3	3

3	9	3	4	$\frac{1}{3}$	-2	2
4	1	2	2	3	-9	2
5	9	1	1	-2	3	3
6	16	4	1	$\frac{2}{3}$	-1	2
7	1	3	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
8	2	2	2	2	-6	2
9	4	4	3	-2	9	1
10	9	1	4	$-\frac{1}{3}$	2	2
11	2	5	2	1	-3	3
12	9	2	1	2	-3	2
13	3	4	2	-2	6	1
14	5	2	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	2
15	4	3	4	2	-9	3
16	1	1	2	$-\frac{1}{3}$	1	2
17	6	3	1	-1	$\frac{3}{2}$	3
18	9	2	2	2	-6	3
19	16	1	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
20	3	5	2	2	-6	1
21	2	4	3	$-\frac{4}{3}$	6	2
22	4	2	4	-2	12	3
23	1	1	1	3	$-\frac{9}{2}$	2

24	5	3	4	$\frac{1}{3}$	-6	2
25	2	2	2	1	-3	3
26	3	4	1	-2	3	3
27	4	1	2	-3	9	2
28	1	2	4	$-\frac{2}{3}$	12	1
29	9	3	3	2	-9	2
30	4	2	1	2	-3	1

Задание 14. Найдите решение краевой задачи для уравнения Пуассона в кольце (см. пример 17)

$$\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad r_1 < |x| < r_2,$$

$$\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_1} = u_1,$$

$$\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_2} = u_2.$$

№	$f(x)$	r_1	r_2	α_1	β_1	α_2	β_2	u_1	u_2
1	$2x_1 x_2$	1	2	1	0	1	0	$4x_1^3 - 3x_1$	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
2	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	3	1	0	0	1	$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$x_2 - \frac{4}{27}x_2^3$
3	$2x_1 + 3x_2$	2	4	0	1	0	1	$\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{1}{16}x_1^3 - \frac{3x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
4	$x_1 - 2x_2$	2	3	0	1	1	0	$\frac{x_1^3 - 3x_1}{2}$	$\frac{2x_1 x_2}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
5	$\frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	4	1	0	0	1	$-4x_2^3 + 3x_2$	x_1
6	$\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$	3	4	0	0	1	1	$\frac{x_1^3 - 12x_1}{16}$	x_2

7	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	2	3	1	0	0	1	$\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
8	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	3	4	0	0	1	1	$\frac{4}{27}x_1^3 - x_1$	$\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$
9	$2x_1 - x_2$	2	4	0	1	1	0	$\frac{1}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
10	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$	2	3	1	1	0	0	$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$x_2 - \frac{4}{27}x_2^3$
11	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	4	0	0	1	1	$\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{1}{16}x_1^3 - \frac{3x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
12	$x_1^2 - x_2^2$	2	5	0	0	1	1	$\frac{x_1^3 - 3x_1}{2}$	$\frac{2x_1 x_2}{5\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
13	x_2	2	4	1	0	0	1	$-4x_2^3 + 3x_2$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
14	x_1	4	5	1	0	0	1	$\frac{x_1^3 - 12x_1}{16}$	x_2
15	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	3	4	0	1	1	0	$\frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
16	$x_1^2 - x_2^2$	2	3	0	0	1	1	$\frac{1}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1$	$\frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
17	$\frac{4x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	3	0	0	1	1	$4x_1^3 - 3x_1$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
18	x_2	2	3	1	1	0	0	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$x_2 - \frac{4}{27}x_2^3$
19	$\frac{3x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	2	4	0	1	1	0	$\frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$\frac{1}{16}x_1^3 - \frac{3x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
20	$x_1 - 3x_2$	2	3	0	0	1	1	$\frac{x_1^3 - 3x_1}{2}$	$\frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
21	$2x_1 - x_2$	2	4	0	0	1	1	$\frac{1}{2}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

22	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$	1	3	1	0	0	1	$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$x_2 - \frac{4}{27}x_2^3$
23	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	4	0	0	1	1	$\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{1}{16}x_2^3 - \frac{3x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
24	$x_1^2 - x_2^2$	2	3	0	1	1	0	$\frac{x_1^3 - 3x_1}{2}$	$\frac{2x_1x_2}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
25	$2x_1x_2$	2	5	1	0	0	1	$\frac{-x_2^3 + 3x_2}{2}$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
26	$3x_1 + x_2$	4	6	1	0	0	1	$\frac{x_1^3 - 12x_1}{16}$	x_2
27	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	4	0	1	1	0	$\frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
28	$x_1^2 - x_2^2$	2	3	0	0	1	1	$\frac{1}{2}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2$	$\frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
29	$\frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	2	0	0	1	1	$4x_1^3 - 3x_1$	$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
30	$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	1	3	1	1	0	0	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$x_2 - \frac{4}{27}x_2^3$

Задание 15. Найдите решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца в круге (см. пример 18)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq |x| < r_0,$$

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_0} = u_0(x).$$

№	k^2	r_0	α	β	$u_0(x)$
1	4	2	1	0	$x_1 + 3x_2^3$
2	16	3	1	0	$2 - \pi \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{2} \arcsin^2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
3	1	4	0	1	$1 - \frac{1}{\pi} \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
4	9	2	1	0	$x_1 + x_2 + 3x_1^3$
5	1	1	0	1	$x_1 + x_1^2 + 3x_2^3$

6	4	3	0	1	$2\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-1+\frac{1}{\pi}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
7	16	4	1	0	$2x_1+3x_1^2+3x_2^3$
8	1	1	0	1	$-1+2\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{1}{\pi}\arcsin^2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
9	4	2	1	0	$1+\frac{\pi}{2}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{1}{4}\arcsin^2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
10	9	3	0	1	$x_1+x_1^2+3x_2^3$
11	4	3	1	0	$x_1^3+x_2+3x_2^3$
12	9	2	0	1	$1+\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{1}{2\pi}\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
13	1	5	0	1	$2x_1^3+x_2^3$
14	1	2	1	0	$1-2\pi\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
15	16	1	1	0	$2x_1^2-x_2^3$
16	16	4	0	1	$\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{1}{2\pi}\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
17	4	2	1	0	$x_1-x_2^2+x_2^3$
18	4	5	1	0	$1-6\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{3}{\pi}\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
19	1	3	0	1	$x_1^4+3x_2^3$
20	1	4	1	0	$1+3\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{3}{2\pi}\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
21	9	2	0	1	$x_1+3x_1^3+2x_2$
22	9	1	1	0	$\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\frac{1}{2\pi}\arccos^2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
23	1	5	0	1	$2-\frac{\pi}{2}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{1}{4}\arcsin^2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
24	16	3	1	0	$x_1+x_1^4-2x_2^2$

25	9	2	0	1	$\frac{1}{2} - \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{2\pi} \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
26	9	3	1	0	$x_1 - x_2^2 + 3x_2^3$
27	4	4	1	0	$1 + 2 \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{\pi} \arcsin^2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
28	4	2	0	1	$-2 + \pi \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{4} \arcsin^2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
29	16	5	0	1	$x_2^2 + 3x_2^3$
30	1	3	1	0	$1 - 3 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{3}{4\pi} \arccos^2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

Задание 16. Найдите решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца в шаре

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \leq |x| < r_0,$$

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_0} = u_0(x).$$

№	k^2	r_0	α	β	$u_0(x)$
1	4	1	1	0	$2x_1 + x_2^2 + x_3$
2	16	2	0	1	$3 + x_1 - \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}$
3	1	3	1	1	$x_1^2 + x_2^3 + 2x_3$
4	9	2	0	1	$2 - x_1 + x_2^2 + x_3^2$
5	1	2	1	2	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3^2$
6	4	1	0	1	$x_1^3 + 3x_2 + x_3^2$
7	16	1	1	1	$1 + x_1 + 2x_2^3 - 3x_3^2$
8	1	3	0	1	$2x_1 + x_2^2 + x_3^3$
9	4	3	1	0	$-x_1^3 + x_2 + 2x_3$
10	9	4	2	1	$3x_1 - 2x_2^2 + x_3^3$
11	4	4	1	0	$4 - x_1 - x_2 - 3x_3^2$
12	9	1	0	1	$2x_1^2 + 4x_2^3 + x_3$
13	1	2	1	0	$\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}} + x_3^2$
14	1	4	2	1	$x_1^2 + x_2 + x_3^3$

15	16	3	0	1	$2 - x_1 + x_2^2 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{9}x_3^2\right)^3}$
16	16	1	1	2	$\sqrt{x_1^4 + x_2^2} + x_3^2$
17	4	2	0	1	$x_1 + x_2^2 - \frac{1}{8}x_3^3$
18	4	1	3	1	$1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^3$
19	1	3	0	1	$x_1 - x_2^2 + 2x_3^2$
20	1	2	1	2	$3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + 2x_3^3$
21	9	1	1	0	$x_1^3 + x_2^2 - 2x_3$
22	9	4	0	1	$\frac{x_1}{4} + 2x_2^3 + x_3^2$
23	1	2	1	0	$1 - \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) + x_3^3$
24	16	1	1	3	$x_1^3 - 2x_2^2 + x_3$
25	9	3	0	1	$10 - (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{9}x_3^2$
26	9	4	1	0	$x_1^3 + x_2^2 + \sqrt{16 - x_3^2}$
27	4	2	0	1	$2 + x_1 - 3x_2^2 - \frac{1}{4}x_3^2$
28	4	1	1	0	$1 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^3$
29	16	3	3	1	$-3 + 2x_1 + x_2^3 + \frac{1}{9}x_3^2$
30	1	4	1	2	$x_1^3 + x_2 + \frac{\sqrt{16 - x_3^2}}{4}$

Задание 17. Найдите решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения в интервале

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\alpha_1 u(x, t) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \alpha_2 u(x, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

№	a^2	l	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	α_1	β_1	α_2	β_2
---	-------	-----	----------------	----------------	------------	-----------	------------	-----------

1	4	1	$x(x-l)$	$\frac{x(x-l)^2}{2}$	1	0	1	0
2	1	4	$x(x-l)^2$	$x\left(\frac{x-l}{2}\right)^2$	1	0	0	1
3	9	5	x^2-35	$-\frac{1}{35}x^2+1$	0	1	1	1
4	1	5	$-\frac{1}{10}x^2+x+1$	$x^2-10x-10$	1	1	0	1
5	4	5	$x^2(x-l)$	$x\left(\frac{x-l}{2}\right)^2$	1	0	1	0
6	16	3	x^2-15	$-\frac{1}{15}x^2+1$	0	1	1	1
7	25	4	$-\frac{1}{8}x^2+x+1$	x^2-8x-8	1	1	0	1
8	4	6	$x^2(x-l)$	$x\left(\frac{x-l}{3}\right)^2$	1	0	1	0
9	2	3	x^2-12	$-\frac{1}{12}x^2+1$	0	1	2	1
10	1	4	x^2-8x-4	$-\frac{1}{4}x^2+2x+1$	2	1	0	1
11	25	6	$x(x-l)^3$	$x\left(\frac{x-l}{3}\right)$	1	0	1	0
12	36	2	$x^2(x-3)$	$6x^2-3x^3$	0	1	0	1
13	4	4	$x\left(\frac{x-l}{4}\right)^2$	$x(x-l)^2$	1	0	0	1
14	1	4	$x\left(\frac{x-l}{2}\right)$	$x(x-l)^2$	1	0	1	0
15	9	3	x^2-24	$-\frac{1}{24}x^2+1$	0	1	1	1
16	4	4	x^2-6x-6	$-\frac{1}{6}x^2+x+1$	1	1	0	1
17	1	4	$x\left(\frac{x-l}{2}\right)^2$	$\frac{x}{3}(x-l)$	1	0	1	0
18	4	-1	$4x^2+3x-3$	$-\frac{4}{3}x^2-x+1$	1	2	1	1

19	9	-2	$x^2 - 8$	$-\frac{1}{4}x^2 + 2$	1	1	0	1
20	9	3	$x^2(x-l)$	$x\left(\frac{x-l}{4}\right)^2$	1	0	1	0
№	a^2	l	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	α_1	β_1	α_2	β_2
21	16	3	$x\left(\frac{x-l}{\sqrt{2}}\right)^2$	$x(x-l)$	0	1	1	1
22	4	-3	$x^2 - 15$	$-\frac{1}{15}x^2 + 1$	1	1	0	1
23	4	3	$x(x-l)$	$x\frac{(x-l)^2}{3}$	1	0	1	0
24	9	3	$4x^2 - 3x - 3$	$-\frac{4}{3}x^2 + x + 1$	1	1	1	0
25	9	1	$-\frac{1}{2}x^2 + x + 1$	$x^2 - 2x - 2$	1	1	0	1
26	16	5	$x\left(\frac{x-l}{2}\right)^2$	$x(x-l)$	1	0	1	0
27	16	1	$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$	$4x^2 - 3x - 6$	1	2	1	1
28	25	3	$-3x^2 + 8x + 8$	$\frac{3}{8}x^2 - x - 1$	1	1	2	1
29	25	2	$3x^2 - 4x - 8$	$-\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$	1	2	2	1
30	4	4	$-\frac{1}{4}x^2 + x + 1$	$x^2 - 4x - 4$	1	1	1	1

Задание 18. Найдите решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения в прямоугольнике

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\alpha_1 u(x, t) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \alpha_2 u(x, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} = 0,$$

$$\alpha_3 X(x) - \beta_3 \frac{\partial X}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \alpha_4 X(x) + \beta_4 \frac{\partial X}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = 0.$$

№	a^2	l_1	l_2	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
---	-------	-------	-------	----------------	----------------

1	4	2	4	$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)}{3} (x_2 - l_2)$	0
2	1	3	5	0	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \frac{x_2 - l_2}{3}$
3	9	4	6	$x x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$	0
4	25	3	5	$x_1 x_2 (x_1 - l_1) \frac{x_2 - l_2}{3}$	0
5	9	4	6	0	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \left(\frac{x_2 - l_2}{3} \right)$
6	4	2	4	$x x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$	0
7	16	1	3	$x_1 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{3} \right) (x_2 - l_2)$	$x_1 x_2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{3} \right)$
8	25	5	7	0	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \left(\frac{x_2 - l_2}{4} \right)$
9	9	2	3	$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$	0
10	4	3	5	$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)}{3} (x_2 - l_2)$	$x_1 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{4} \right) (x_2 - l_2)$
11	1	4	5	0	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \frac{x_2 - l_2}{3}$
12	9	5	6	$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$	0
13	4	2	3	$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)}{3} (x_2 - l_2)$	$x_1 \frac{x_1 - l_1}{4} x_2 (x_2 - l_2)$
14	16	4	6	0	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)$
15	25	3	5	$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$	0
16	16	2	3	$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)}{2} (x_2 - l_2)$	$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)(x_2 - l_2)}{4}$
17	9	1	2	$x_1^2 x_2 (x_1 - l_1)^2 \frac{x_2 - l_2}{3}$	0

18	4	5	3	$x_1 x_2^2(x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{2} \right)^2$			0		
19	9	3	2	$x_1 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{3} \right) (x_2 - l_2)$			$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)(x_2 - l_2)}{5}$		
20	4	2	1	0			$x_1^2 x_2 \frac{(x_1 - l_1)^2}{3} (x_2 - l_2)$		
21	16	4	2	0			$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{3} \right)^2$		
22	25	5	3	$x_1 x_2 (x_1 - l_1) \frac{x_2 - l_2}{2}$			$x_1 x_2 \frac{(x_1 - l_1)}{3} (x_2 - l_2)$		
23	16	2	1	$x_1^2 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{3} \right)^2 (x_2 - l_2)$			0		
24	9	3	1	0			$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{3} \right)^2$		
25	4	4	2	$x_1 x_2 (x_1 - l_1) \frac{x_2 - l_2}{2}$			$x_1 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{3} \right) (x_2 - l_2)$		
26	1	9	6	$x_1^2 x_2 \left(\frac{x_1 - l_1}{3} \right)^2 (x_2 - l_2)$			0		
27	9	1	3	0			$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{3} \right)^2$		
28	4	2	4	$x_1 x_2 \frac{(x_2 - l_2)(x_1 - l_1)}{2}$			$x_1 x_2 (x_1 - l_1) \frac{x_2 - l_2}{3}$		
29	16	3	2	$x_1^2 x_2 \frac{(x_1 - l_1)^2}{3} (x_2 - l_2)$			0		
30	25	4	2	0			$x_1 x_2^2 (x_1 - l_1) \left(\frac{x_2 - l_2}{\sqrt{3}} \right)^2$		
1	1	0	1	0	1	0	1	0	
2	0	1	0	1	1	0	1	0	
3	1	0	1	0	0	1	0	1	
4	1	0	1	0	1	0	1	0	
5	0	1	0	1	1	0	1	0	
6	1	0	1	0	0	1	0	1	
7	1	0	1	0	1	0	1	0	
8	0	1	0	1	1	0	1	0	
9	1	0	1	0	0	1	0	1	
10	1	0	1	0	1	0	1	0	
11	0	1	0	1	1	0	1	0	
12	1	0	1	0	0	1	0	1	
13	1	0	1	0	1	0	1	0	

14	0	1	0	1	1	0	1	0
15	1	0	1	0	0	1	0	1
16	1	0	1	0	1	0	1	0
17	0	1	0	1	1	0	1	0
18	1	0	1	0	0	1	0	1
19	1	0	1	0	1	0	1	0
20	0	1	0	1	1	0	1	0
21	1	0	1	0	0	1	0	1
22	1	0	1	0	1	0	1	0
23	0	1	0	1	1	0	1	0
24	1	0	1	0	0	1	0	1
25	1	0	1	0	1	0	1	0
26	0	1	0	1	1	0	1	0
27	1	0	1	0	0	1	0	1
28	1	0	1	0	1	0	1	0
29	0	1	0	1	1	0	1	0
30	1	0	1	0	0	1	0	1

Задание 19. Найдите решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения в круге (см. пример 23)

$$u_{tt} + a^2 \Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 \leq |x| < r_0,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\alpha u(x) \Big|_{|x|=r_0} + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{|x|=r_0} = 0.$$

№	a^2	r_0	α	β	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
1	4	1	1	0	$\frac{ x }{4}(1 - x ^2),$	0
2	1	4	1	0	0	$ x \left(1 - \frac{ x ^2}{16} \right),$
3	9	5	2	1	$ x (25 - x ^2)^3$	0
4	1	5	1	0	0	$\frac{\sqrt{25 - x ^2}}{4} x $
5	4	5	1	2	$ x \left(\frac{\sqrt{25 - x ^2}}{3} \right)^3$	0
6	16	5	0	1	0	$ x \sqrt{\left(1 - \frac{ x ^2}{25} \right)^3}$

7	25	6	1	0	0	$ x \sqrt{36- x ^2}$
8	4	6	0	1	$ x \sqrt{\left(1-\frac{ x ^2}{36}\right)^3}$	0
9	6	6	2	1	$ x \sqrt{(36- x ^2)^3}$	0
10	1	6	1	0	0	$ x \sqrt{1-\frac{ x ^2}{36}}$
11	25	6	1	2	$ x \sqrt{\left(1-\frac{ x ^2}{36}\right)^3}$	0
12	36	6	2	1	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{36}\right)^2$	0
13	4	4	0	1	$ x \sqrt{(16- x ^2)^3}$	0
14	1	4	1	1	0	$ x (16- x ^2)^2$
15	9	4	0	1	0	$ x \sqrt{\left(1-\frac{ x ^2}{16}\right)^3}$
16	4	4	2	1	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{16}\right)^3$	0
17	1	4	1	2	0	$ x (16- x ^2)^3$
18	4	4	1	0	0	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{16}\right)$
19	9	3	0	1	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{9}\right)^2$	0
20	9	3	1	0	0	$ x (9- x ^2)$
21	16	3	0	1	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{9}\right)^2$	0

22	4	3	2	1	0	$ x \sqrt{\frac{(9- x ^2)^3}{2}}$
23	4	3	1	2	0	$ x \sqrt{(9- x ^2)^3}$
24	9	3	0	1	$ x \left(\sqrt{1-\frac{ x ^2}{9}}\right)^3$	0
25	9	5	1	1	$ x (25- x ^2)^2$	0
26	16	5	0	1	0	$ x \left(\sqrt{1-\frac{ x ^2}{25}}\right)^3$
27	16	5	1	0	$ x \sqrt{1-\frac{ x ^2}{25}}$	0
28	25	6	1	1	0	$ x \left(1-\frac{ x ^2}{36}\right)^2$
29	25	6	0	1	0	$\frac{ x (36- x ^2)^2}{2}$
30	4	6	1	0	$ x \sqrt{1-\frac{ x ^2}{36}}$	0

Задание 20. Найдите решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения в шаре

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \leq |x| < r_0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{|x|=r_0} = 0.$$

№	a^2	r_0	α	β	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$
1	4	5	1	0	$ x - 5$	0
2	9	3	1	1	$3 x - 9$	$\frac{ x }{2} - 2$
3	4	4	0	1	$(x - 4)^2$	0
4	1	2	1	0	0	$ x ^2 - 4$

5	9	4	0	1	0	$(4- x)^2$
6	1	1	0	1	$(1- x)^2$	0
7	4	2	2	1	$\frac{ x }{3}-\frac{5}{6}$	$ x -\frac{5}{2}$
8	9	2	1	0	0	$ x -2$
9	16	3	1	2	$ x -5$	$\frac{5- x }{3}$
10	4	5	1	0	$(x -5)^2$	0
11	4	2	0	1	$(2- x)^2$	0
12	1	4	1	0	0	$\left(1-\frac{ x }{16}\right)$,
13	9	3	2	1	$\frac{1}{2} x -\frac{3}{4}$	$2 x -7$
14	1	5	0	1	0	$(5- x)^2$
15	4	3	1	1	$3 x -12$	$4 x -16$
16	25	2	1	0	0	$2- x $
17	4	5	0	1	$\left(\frac{ x }{5}-1\right)^2$	0
18	25	1	1	1	$1-\frac{ x }{2}$	$ x -2$
19	9	6	0	1	0	$\frac{(x -6)^2}{2}$
20	4	3	1	0	$3- x $	0
21	4	2	1	1	$ x -3$	$\frac{3- x }{2}$
22	1	3	1	0	0	$9- x ^2$
23	4	4	1	0	0	$ x -4$
24	9	3	0	1	$\left(1-\frac{ x }{3}\right)^2$	0
25	9	3	1	0	0	$3- x $
26	16	5	1	0	$ x -5$	0
27	4	6	0	1	0	$(x -6)^2$
28	4	2	1	2	$2 x -8$	$4- x $

29	6	3	0	1	$3 - x $	0
30	1	2	0	1	0	$(2 - x)^2$

Задание 21. Найдите решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения в интервале

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\alpha_1 u(x, t) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\alpha_2 u(x, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

№	a^2	$f(x, t)$	l	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	α_1	β_1	α_2	β_2
1	9	$(x+3)e^{-2t}$	3	$x(x-l)$	$\frac{x(x-l)}{2}$	1	0	1	0
2	1	$2x^2 e^{-t}$	2	0	$\frac{x^2(x-l)^2}{2}$	0	1	0	1
3	4	$(x+1)e^{-t}$	1	$x^2 \left(\frac{x-l}{2} \right)^2$	0	0	1	0	1
4	4	$(2x+3)e^{-2t}$	2	$\frac{x}{3}(x-l)$	$\frac{x}{2}(x-l)$	1	0	1	0
5	16	$x^2 e^{-3t}$	3	$\frac{x}{2}(x-l)$	$3x(x-l)$	1	0	1	0
6	25	$(x^2 - 2)e^{-(t+2)}$	2	$2x^2(x-l)^2$	0	0	1	0	1
7	9	$(x+2)e^{-t}$	1	$x^2 \left(\frac{x-l}{2} \right)^2$	0	0	1	0	1
8	4	$(2x+3)e^{-2t}$	5	$x(x-l)$	$\frac{x}{3}(x-l)$	1	0	1	0
9	16	$(2x+1)e^{-3t}$	2	$x^2 \frac{(x-l)^2}{2}$	0	0	1	0	1
10	25	$(x-2)e^{-3t}$	1	0	$x^2 \left(\frac{x-l}{2} \right)^2$	0	1	0	1
11	16	$x^2 e^{-2t}$	2	0	$\frac{x^2(x-l)^2}{3}$	0	1	0	1
12	9	$6xe^{-(t+1)}$	1	$\frac{x(x-l)}{3}$	$x \frac{x-l}{4}$	1	0	1	0
13	4	$(x-2)^2 e^{-t}$	3	$x(x-l)$	$x(x-l)$	1	0	1	0

14	16	$xe^{-(t+2)}$	4	$x^2(x-l)^2$	$\left(\frac{x(x-l)}{2}\right)^2$	0	1	0	1
15	9	$3xe^{-(2t+1)}$	5	$\frac{x}{3}(x-l)$	$x(x-l)$	1	0	1	0
16	4	$(x-1)e^{-t}$	2	$x(x-l)$	$x\frac{(x-l)}{3}$	1	0	1	0
17	16	$(2x+1)e^{-t}$	1	$\frac{x^2}{2}(x-l)^2$	$x^2\left(\frac{x-l}{3}\right)^2$	0	1	0	1
18	25	$xe^{-(t+2)}$	3	$x\frac{(x-l)}{3}$	$\frac{x(x-l)}{4}$	1	0	1	0
19	16	$(x+1)^2e^{-t}$	2	$x\frac{x-l}{3}$	$\frac{x}{2}(x-l)$	1	0	1	0
20	9	$(x-2)e^{-2t}$	1	0	$x^2\left(\frac{x-l}{2}\right)^2$	0	1	0	1
21	4	$3xe^{-(t+1)}$	3	$x^2\left(\frac{x-l}{4}\right)^2$	0	0	1	0	1
22	16	$3xe^{-(t+1)}$	4	0	$x^2\left(\frac{x-l}{3}\right)^3$	0	1	0	1
23	25	$2(x+3)e^{-t}$	2	$\frac{x}{2}(x-l)$	$x(x-l)$	1	0	1	0
24	4	$(x+2)e^{-3t}$	3	$x(x-l)$	$\frac{x}{3}(x-l)$	1	0	1	0
25	16	$(x+t-1)e^{-t}$	5	$\frac{x}{2}(x-l)$	$\frac{x(x-l)}{3}$	1	0	1	0
26	9	$3xe^{-(t+2)}$	2	0	$-x^2+2x+1$	2	1	2	1
27	25	xe^{-2t}	2	$x(x-l)^3$	x^2-2x-2	1	2	2	1
28	4	xte^{-t}	1	$-\frac{1}{2}x^2+x+1$	x^2-2x-2	1	1	1	1
29	16	$3xe^{-(t+2)}$	3	x^2-3x-6	$-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+1$	1	2	1	2
30	9	$4xe^{-t}$	2	$-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+1$	x^3-2x-6	1	3	1	2

Контрольная работа №1
ВАРИАНТ №

1. Решить задачу Коши:
 $xU_x + 2yU_y = x^2 + 4y^2, \quad U|_{y=2} = x^2.$
2. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:
 $16U_{xx} + 8U_{xy} + U_{yy} + 12U_x + 3U_y = 0;$

3. Решить задачу Коши:

$$U_{xx} + 2\cos x U_{xy} - \sin^2 x U_{yy} - \sin x U_y = 0; U|_{y=0} = \sin x = x; U_y|_{y=0} = \sin x = 1.$$

Контрольная работа №2

ВАРИАНТ №2

1. Найти решение смешанной задачи методом Фурье:

$$U_t = U_{xx} - 2U, \quad U_x|_{x=0} = 2t; \quad U|_{x=2} = 0; \quad U|_{t=0} = 10x.$$

2. Решить смешанную задачу методом Фурье:

$$U_t = U_{xx} - 2U, \quad U_x|_{x=0} = 2t; \quad U|_{x=2} = 0; \quad U|_{t=0} = 10x.$$

3. Найти гармоническую функцию $U(r, \varphi)$ внутри круга радиуса R , удовлетворяющую условию

$$\varphi U|_{r=R} = \sin^3 \varphi.$$

Контрольная работа №3

ВАРИАНТ №2

1. Операционным методом решить уравнение

$$U_y = U_{xx} + U + 2\cos x, \quad U(0, y) = \exp(-3y), \quad U(0, y) = 0, \quad 0 < x, y < \infty.$$

2. Методом функции Грина решить задачу Коши:

$$U_t = 2\Delta U + t\cos x, \quad U|_{t=0} = \cos y \cos z.$$

3. Методом усреднения (по формуле Кирхгофа) решить задачу Коши:

$$U_{tt} = 8\Delta U + t^2 x^2, \quad U|_{t=0} = y^2, \quad U_t|_{t=0} = z^2.$$

Контрольная работа №1

ВАРИАНТ №2

1. Вычислить
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2} dx, \quad a > 0.$$

2. Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$(xy')' + \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1, \\ |y(0)| < \infty, \quad y(1) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

3. Вычислить
$$\int_0^\pi x P_n(x/\pi) dx.$$

4. Функцию $f(x) = x^\nu$ разложить в ряд Дини на интервале $]0, 1[$ по системе $(J_\nu(\gamma_n^\nu x))$, если γ_n — нули $J'_\nu(x)$.

Контрольная работа №2 по ММФ - II

ВАРИАНТ №2

1. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса b и такую, что $u_r|_{r=b} = \sin^2 \theta$.

2. Круговой цилиндр, радиус основания которого b , а высота h , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности постоянна и равна T . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

3. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , закрепленной по краю, если $u|_{t=0} = AJ_0(\alpha_k^{(0)} r/b)$, где $\alpha_k^{(0)}$ – положительный корень уравнения $J_0(\alpha) = 0$. Начальная скорость равна нулю.

4. Вопросы и задания, выносимые на экзамен/зачет

Образцы экзаменационных билетов

Экзаменационный билет №

1. Постановка задач математической физики на примере волнового уравнения: задачи Коши, краевая, начально-краевая (смешанная). Единственность решения.
2. Решение первой краевой задачи для круга методом Фурье.
3. Решить задачу Коши

$$U_{xx} - U_{yy} - 2U_x - 2U_y = 4, \quad U(0, y) = -y, \quad U_x(0, y) = y - 1.$$

4. Решить краевую задачу методом Фурье:
 $U_t = U_{xx} + U, \quad U(t, 0) = 1 + t = U(t, \square), \quad U(0, x) = x + \sin 2x.$
5. Используя интегральное преобразование Лапласа, решить задачу
 $U_{xx} - U_y + U = x, \quad 0 < x < \square, \quad 0 < y < \square, \quad U(0, y) = y, \quad U_x(0, y) = 1.$

Зачетный билет №

1. Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра (*доказательство двух соотношений*).
2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах.
3. Функцию $f(x) = x^p$ разложить в ряд Фурье на интервале $(0, \infty)$ по полиномам Лагерра.
4. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R , закрепленной по краю, если в начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

Вопросы для зачета

- 1) Сформулировать основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений в частных производных. Привести примеры решений простейших дифференциальных уравнений в частных производных.
- 2) Дать определение характеристической системы и доказать теорему об общем решении линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.
- 3) Поставить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Дать определение характеристических линий и доказать теорему об однозначной разрешимости задачи Коши.
- 4) Сформулировать основные понятия, определения для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Привести их классификацию.
- 5) Сформулировать алгоритм приведения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду.

- 6) Поставить задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Привести алгоритм решения задачи методом характеристик.
- 7) Вывести одномерное волновое уравнение. На примере поперечных или продольных колебаний стержней или электрических колебаний в проводах (на выбор) сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач.
- 8) Вывести двумерное (трехмерное) волновое уравнение и сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач на примере колебаний мембраны или твердого тела.
- 9) Вывести одномерное уравнение теплопроводности и сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач.
- 10) Вывести уравнение распространения тепла (диффузии) в пространстве.
- 11) Сформулировать возможные постановки начально-краевых задач.
- 12) Поставить возможные краевые задачи для уравнений эллиптического типа. Дать физическую интерпретацию поставленной задачи.
- 13) Дать понятие классических и обобщенных решений задач
- 14) математической физики. Дать определение корректно поставленной задачи.
- 15) Провести редукцию начально-краевой задачи для уравнений математической физики.
- 16) Показать связь начально-краевой задачи для однородного уравнения (волнового или теплопроводности) с однородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
- 17) Показать связь начально-краевой задачи для неоднородного уравнения (волнового или теплопроводности) с однородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
- 18) Показать связь начально-краевой задачи для однородного уравнения с однородными начальными и неоднородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
- 19) Записать решение краевых задач для уравнений эллиптического типа через функцию Грина.
- 20) Вывести первую и вторую формулы Грина.
- 21) Получить фундаментальное решение уравнения Гельмгольца и Лапласа (плоский или пространственный случай).
- 22) Сформулировать основные свойства гармонических функций. Доказать любые два.
- 23) Дать понятие преобразования Кельвина и охарактеризовать поведение гармонических функций на бесконечности.
- 24) Поставить первую и третью краевые задачи. Сформулировать условия единственности и устойчивости их решения.
- 25) Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач для уравнения Лапласа (декартова или полярная система координат).
- 26) Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач уравнения Лапласа (цилиндрическая или сферическая система координат).
- 27) Вывести интеграл Пуассона или Дини.
- 28) Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач уравнения Гельмгольца (система координат на выбор). Сформулировать условия существования однозначного решения.
- 29) Решить задачу Дирихле методом функций Грина.
- 30) Сформулировать один из методов построения функции Грина задачи Дирихле.
- 31) Вывести формулу Пуассона задачи Дирихле в пространстве.
- 32) Определить функцию Грина (Неймана) задачи Неймана для уравнения Лапласа и с ее помощью найти решение соответствующей задачи.
- 33) Сформулировать один из методов построения функции Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа.

- 34) Решить двумерные краевые задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа.
- 35) Решить задачу Коши для одномерного однородного волнового уравнения методом Даламбера.
- 36) Решить задачу Коши для одномерного неоднородного волнового уравнения методом Даламбера. Сформулировать принцип Дюамеля.
- 37) Решить смешанную задачу для одномерного волнового уравнения на полупрямой методом Даламбера (четного и нечетного продолжения на выбор).
- 38) Решить смешанную задачу для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке методом Даламбера.
- 39) Решить смешанную задачу для одномерного однородного волнового уравнения на конечном отрезке методом Фурье. Дать определение фундаментального решения задачи.
- 40) Решить смешанную задачу для одномерного неоднородного волнового уравнения на конечном отрезке методом Фурье.
- 41) Сформулировать общую схему метода Фурье для одномерного волнового уравнения.
- 42) Получить решение уравнения Даламбера в виде сферической волны.
- 43) Поставить задачу Коши для уравнения Даламбера в пространстве. Вывести формулу Кирхгофа.
- 44) Поставить задачу Коши для уравнения Даламбера на плоскости. Вывести формулу Пуассона.
- 45) Сформулировать обобщенную задачу Коши для волнового уравнения в пространстве. Найти ее фундаментальное решение.
- 46) Методом Фурье решить задачу о колебаниях мембран или твердых тел (на выбор).
- 47) Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.
- 48) Найти функцию Грина задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности и доказать ее свойства.
- 49) Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом функций Грина.
- 50) Решить смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности методом функций Грина или методом Фурье (на выбор).
- 51) Доказать принцип максимума и теорему о единственности решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на конечном отрезке.
- 52) Определить функцию Грина смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Решить задачу методом функций Грина или методом Фурье (на выбор).
- 53) Найти функцию Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
- 54) Привести общую схему решения уравнения теплопроводности в пространстве.
- 55) Сформулировать задачу Штурма–Лиувилля для линейных дифференциальных уравнений. Самосопряженная форма уравнения задачи. Исследовать влияние граничных условий на свойства собственных значений и собственных функций.
- 56) Сформулировать основные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля. Доказать любые два свойства.
- 57) С помощью обобщенного степенного ряда получить частные решения уравнения Бесселя. Дать определение функции Бесселя первого рода.
- 58) Вычислить вронскиан функций Бесселя $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$. Найти общее решение уравнения Бесселя с нецелым индексом.
- 59) Дать определение функции Неймана. Вычислить вронскиан функций $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ и найти общее решение уравнения Бесселя с произвольным индексом.
- 60) Доказать рекуррентные соотношения для функций Бесселя $[x^{\nu+1} J_\nu(x)]' = x^{\nu+1} J_{\nu-1}(x)$.

$J_{\nu-1}(x)$,

$[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$ и сформулировать следствия из них.

61) Выразить функции Бесселя и Неймана полуцелых индексов через элементарные функции.

62) Записать уравнение Бесселя с параметром и найти его частные решения. Дать определение функции Ханкеля.

63) Вычислить вронскиан модифицированных функций Бесселя $I_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$ и найти общее решение модифицированного уравнения Бесселя.

64) Исходя из известных рекуррентных соотношений для функций Бесселя, доказать аналогичные соотношения для модифицированных функций.

65) Исследовать асимптотическое поведение цилиндрических функций (любых двух) в окрестности точек $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$.

66) С помощью обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа доказать теорему об интегральном представлении частного решения уравнения Бесселя.

67) Исходя из интегрального представления решения уравнения Бесселя, доказать одну из формул (интегралов) Пуассона для функций Бесселя.

68) Исходя из производящей функции получить представление функций Бесселя в виде ряда и интеграла Бесселя.

69) Сформулировать основные свойства нулей бесселевых функций. Доказать любые два свойства.

70) Исходя из интегралов Ломмеля, вычислить норму и получить условие ортогональности функций Бесселя.

71) Дать определение и вычислить коэффициенты разложения рядов Фурье–Бесселя и Дини. Сформулировать теорему Гобсона.

72) Найти решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя.

73) С помощью производящей функции $\phi(x,t) = (1 - t^2 - 2tx)^{-1/2}$ получить формулу Родрига для полиномов Лежандра.

74) С помощью производящей функции получить формулу Родрига для полиномов Эрмита.

75) С помощью производящей функции получить формулу Родрига для полиномов Эрмита.

76) С помощью производящей функции получить формулу Родрига для полиномов Лагерра.

а) основная литература:

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1984. — 383 с.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969. — 287 с.

3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 416 с.

4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГТУ, 1996. — 367 с.

5. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.

6. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Специальные функции. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.

7. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Уравнения математической физики. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.

8. Владимиров В.С., Жаринов В.С. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2008. — 400 с.

9. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.
11. Шаповалов А.В. Введение в нелинейную физику. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 129 с.
12. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 364 с.

б) дополнительная литература:

1. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Наука, 1985. – 310 с.
 2. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. - М.: Физматлит, 2004. - 688 с.
 3. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
 4. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. - М.: Высшая школа, 1973. - 192 с.
 5. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физмат- лит, 2001. – 576 с.
 6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М: Физматлит, 2005. – 254 с.

7.2. Интернет-ресурсы

Название ресурса	Ссылка/доступ
Электронная библиотека онлайн «Единое окно Образовательным ресурсам»	http://window.edu.ru
«Образовательный ресурс России»	http://school-collection.edu.ru
Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ, ГИА	http://www.edu.ru –
Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР)	http://fcior.edu.ru –
ЭБС "КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА". Электронная библиотека технического вуза	http://polpred.com/news
Издательство «Лань». Электронно-библиотечная система	http://www.studentlibrary.ru –
Издательство «Лань». Электронно-библиотечная система	http://e.lanbook.com –
Еженедельник науки и образования Юга России «Академия»	http://old.rsue.ru/Academy/Archives/Index.htm
Научная электронная библиотека «e-Library»	http://elibrary.ru/defaultx.asp –
Электронно-библиотечная система IPR books	http://www.iprbookshop.ru –
Электронно-справочная система документов в сфере образования «Информо»	http://www.informio.ru
Информационно-правовая система «Консультант-плюс»	Сетевая версия, доступна со всех компьютеров в корпоративной сети ИнГГУ

Информационно-правовая система «Гарант»	Сетевая версия, доступна со всех компьютеров в корпоративной сети ИнтГУ
---	---

7.3. Программное обеспечение

Для проведения лекционных и лабораторных занятий рекомендуется использовать программное обеспечение: операционная система ОС Windows 7 и выше, пакет Microsoft Office 2010 и выше, обслуживающие программы и среды разработки программ по выбору преподавателей.

7.4. Материально-техническое обеспечение

Материально-техническое обеспечение учебного процесса по дисциплине определено нормативными требованиями, регламентируемыми приказом Министерства образования и науки РФ № 986 от 4 октября 2010 г. «Об утверждении федеральных требований к образовательным учреждениям в части минимальной оснащенности учебного процесса и оборудования учебных помещений», Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки.

Для проведения всех видов учебных занятий по дисциплине и обеспечения интерактивных методов обучения, необходимы столы, стулья (на группу по количеству посадочных мест с возможностью расстановки для круглых столов, дискуссий, прочее); доска интерактивная с рабочим местом (мультимедийный проектор с экраном и рабочим местом); желателен доступ в информационно-коммуникационную сеть «Интернет».

В соответствии с требованиями ФГОС ВО при реализации настоящей дисциплины ОПОП ВО необходимо также учитывать образовательные потребности обучающихся с ограниченными возможностями здоровья, обеспечивать условия для их эффективной реализации, а также возможности беспрепятственного доступа обучающихся с ограниченными возможностями здоровья к объектам инфраструктуры образовательного учреждения.