

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА ФИЗИКА**

**СОГЛАСОВАНО**

Руководитель образовательной программы

\_\_\_\_\_/ Нальгиева М. А.  
от « 21 » 05 2024г.

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан физико-математического факультета

\_\_\_\_\_/ Кульбужев Б. С.  
от « 21 » 05 2024г.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**по дисциплине «Дифференциальные уравнения»**  
(индекс дисциплины по учебному плану, наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки –  
**03.03.02      Физика**  
(код, наименование)

Направленность: **Физика**

Квалификация выпускника – *бакалавр физики*

Форма обучения очная

Магас, 2024

## ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ ДИСЦИПЛИНОЙ

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся <b>должен</b> :
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<p>УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие;</p> <p>УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи;</p> <p>УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов;</p> <p>УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения;</p> <p>УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.</p>	<p>Знать:</p> <p>Цели и задачи научных исследований по направлению деятельности, базовые принципы и методы их организации; основные источники научной информации и требования к представлению информационных материалов; способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирование задач различных групп, формулировка известных утверждений, следствий из них</p> <p>Уметь:</p> <p>Составлять общий план работы по заданной теме, предлагать методы и способы обработки результатов, проводить исследования по согласованному с руководителем плану, представлять полученные результаты, выбирать наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике.</p>
ОПК-1	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы	<p>ОПК-1.1. Знать: основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.</p> <p>ОПК-1.2.</p>	<p>Владеть:</p> <p>систематическими знаниями по направлению деятельности;</p>

	математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	Уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования.	углубленным знаниями по выбранной направленности подготовки, базовыми навыками проведения научно-исследовательских работ по предложенной теме.
--	---	---	--

## Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

### Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

### Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
-----------------------	--

### Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

#### ✓ *Перечень примерных вопросов и заданий для самостоятельной работы:*

1. какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Порядок дифференциального уравнения. Что называют решением дифференциального уравнения?
2. какое уравнение называется уравнением первого порядка в частных производных? Понятие полного интеграла. Линейные и нелинейные задачи.
3. Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка и его решения. Поле направлений, интегральные кривые О.Д.У.?
4. какое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными? Метод решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
5. какие уравнения первого порядка называются линейными? Линейные однородные и неоднородные уравнения? Методы их решения. Уравнение Бернулли и его решение?
6. какое дифференциальное уравнение называется однородным уравнением первого порядка? Методы его решения.
7. что такое полный дифференциал? Уравнения в полных дифференциалах? Методы их решения.
8. что такое математическая модель? Этапы построения математической модели процесса или явления? Примеры простейших моделей на базе дифференциальных уравнений первого порядка?
9. простейшие уравнения высших порядков и их решения методом понижения порядка?
10. линейные дифференциальные уравнения второго порядка и их решения? Какие линейные уравнения называются однородными и неоднородными? Теорема о структуре решения линейного однородного и неоднородного уравнения? Решения неоднородного уравнения в случае специальной правой части, методом вариации произвольных постоянных?
11. математические модели на базе уравнений второго порядка? Примеры моделей. Краевые задачи.

#### ✓ *Вопросы к экзамену:*

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений – порядок уравнения, геометрическая интерпретация уравнения и его решения, и т.д. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, стандартный вид и методы решения.
3. Линейные уравнения первого порядка-стандартный вид и методы решения. Уравнение Бернулли.
4. Однородные дифференциальные уравнения – стандартный вид и методы их решения.
5. Уравнения в полных дифференциалах-стандартный вид и методы их решения.

6. Простейшие уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро-стандартный вид и методы их решения.
7. Простейшие уравнения высших порядков-стандартный вид и методы их решения.
8. Линейные однородные уравнения второго порядка-теорема о строении решения и методы его решения.
9. Линейные неоднородные уравнения второго порядка –теорема о строении общего решения и методы решения вариацией произвольных постоянных.
10. Линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью.
11. Общие понятия о системах дифференциальных уравнений. Нормальные системы дифференциальных уравнений.
12. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Классификация краевых задач-линейная, однородная и неоднородная краевая задача.
13. Приближенное интегрирование систем дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.
14. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Уравнения линейные относительно производных (частные случаи интегрирования).

#### **Примерная тематика курсовых работ**

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда
6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций. Применение численных методов.

## Контрольные и индивидуальные задания

### Образцы индивидуальных заданий

#### Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$2(y + y') = x + 2.$$
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными
  1.  $(x^3 + 2x)y^2 dy = x dx$ ; 2.  $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$ ; 3.  $\frac{y'}{y} = x \cos^2 y$ ;
  4.  $y'x^2 e^y = e^{-y}$ ,  $y(1) = 0$ ; 5.  $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$ ,  $y(0) = 2$ .
3. Решить однородные уравнения
  1.  $x^2 y' - y^2 = 2x^2$ ; 2.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ ; 3.  $xydy - y^2 dx = (x+y)^2 e^{-y/x} dx$ ;
  4.  $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$ ; 5.  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
  1.  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ; 2.  $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ ; 3.  $xy' = y + x^2 \cos x$ ;
  4.  $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ ,  $y(2) = 1,5$ ; 5.  $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$ ,  $y(0) = 1$ .
5. Решить уравнение Бернулли
  1.  $y' = x^3 y^3 - xy$ ; 2.  $xy + 2y = x^5 y$ ; 3.  $2(xy' + y) = y^2 \ln x$ ,  $y(1) = 2$ .
6. Решить уравнение в полных дифференциалах
  1.  $(y + \frac{2}{x^2})dx + (x + \frac{3}{y^2})dy = 0$ ; 2.  $\frac{3x^2 + y}{y^2} dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3} dy$ .
7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$
8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:
  1.  $xy' - xe^{x/y} = 2$ ; 2.  $xydx + (x+1)dy = 0$ ; 3.  $xy' + 3xy^3 = 2y$ ;
  4.  $dy + (3y - e^{3x})dx = 0$ ; 5.  $(x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0$ .
9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений
  1.  $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3 y^3)dy = 0$ ; 2.  $xy' + y = y^2$ ; 3.  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ ;
  4.  $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ ; 5.  $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + y^2)dy = 0$ .
10. Решить задачу Коши
  1.  $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ ; 2.  $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}$ ,  $y(0) = 1$ ;
  3.  $ydx = (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy$ ,  $y(16) = \pi$ .
11. Решить уравнения
  1.  $y = x + y' - \ln y'$ ; 2.  $x[(y')^2 - 1] = 2y'$ ; 3.  $y = xy' - (y')^2$ .

#### Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решить уравнения, понизив их порядок
  1.  $y'' + 2xy' = 0$ ; 2.  $(y-1)y'' = 2(y')^2$ ;

3.  $y''' + 3y'y'' = 0$ ; 4.  $yy'' = 2x(y')^2$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y'(2) = 0,5$ .

1. Найти общее решение уравнения

1.  $y'' - 2y' + 4y = 0$ ; 2.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ; 3.  $y'' + 4y = 0$ .

2. Решить задачу Коши

1.  $3y'' - 2y' - 8y = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ ; 2.  $y'' + y = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ ,  $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$ .

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

1.  $f(x) = 3x^2 - 1$ ; 2.  $f(x) = 3e^{-x}$ ; 3.  $f(x) = 2\sin x$ ; 4.  $f(x) = e^x \cos 2x$ .

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\frac{x}{2}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

1.  $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$ ; 2.  $y^{(4)} - y''' = 5(x + 2)^3$ ;

3.  $(4x + 3)^2 y'' + (4x + 3)y' - 16y = 0$ ; 4.  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$ .

## Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

1)  $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$  . 2)  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$  ,  $\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

3)  $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$  . 4)  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}$  .

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \frac{1}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , где

1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 5$ ; 2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - y'' + y' + x - 3y = 0, \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

## Образцы контрольных заданий

### Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

#### Вариант № 1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1.  $(y + y \ln x)dx - (x - xy)dy = 0.$

2.  $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$

3.  $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$

II. Найти частные решения

1.  $xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 1.$

2.  $e^y dx = (2y - xe^y)dy, \quad y(-1) = 0.$

### Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков»

#### Вариант №1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1.  $y'' = y' + x.$

2.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$

II. Решить задачу Коши:

1.  $yy'' + (y')^2 = 0. \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$

2.  $y'' - y' = e^{-x} + 2x. \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

## Образец экзаменационного билета

### Билет 1

#### Дифференциальные уравнения

1. Определение и способ решения дифференциального уравнения Бернулли.
2. Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
3. Найти общее решение уравнения  $x^2 y' - \cos 2y = 1.$
4. По виду правой части и корням характеристического уравнения записать частное решение уравнения  $y'' + y = 4x \cos x.$
5. Найти частное решение уравнения  $y' = 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(e) = 1.$



