

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Направление подготовки
01.03.01- «Математика»

Направленность
Математика

квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Фонд оценочных средств

разработан _____ Танкиевым И.А., профессор, к.ф.-м.н.

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры
«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024 г. № 9
Зав. кафедрой _____ Танкиев И.А.

г. МАГАС, 2024

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица1.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК 1.1: Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК 1.2: Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК 1.3: Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов УК1.4: При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формулирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения. УК 1.5.: Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки	Знать: Цели и задачи научных исследований по направлению деятельности, базовые принципы и методы их организации; основные источники научной информации и требования к представлению информационных материалов; способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирование задач различных групп; формулировки известных утверждений, следствий из них Уметь: Составлять общий план работы по заданной теме, предлагать методы и способы обработки результатов, проводить исследования по согласованному с руководителем плану, представлять полученные результаты, выбирать наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике.

ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>Знает: Методы исследования, применяемые в математическом анализе, комплексном и функциональном анализе, алгебре, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логик, теории вероятностей, математической статистике и случайных процессах, численных методах, теоретической механике.</p> <p>Умеет: Публично доказывать и объяснять фундаментальные результаты, соответствующих разделам математики</p> <p>Владеет: Навыками строгого доказательства утверждений в области математического анализа комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики случайных процессов, численных методов, теоретической механики</p>	Владеть: систематическими знаниями по направлению деятельности; углубленным знаниями по выбранной направленности подготовки, базовыми навыками проведения научно-исследовательских работ по предложенной теме.
ПК-3	Способность строгого доказательства утверждения, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	<p>Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа.</p> <p>Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа. Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода</p>	

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.

Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии

Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы
Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

Оценивание ответа на зачете

«Зачтено»	4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
	Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы
	Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
	Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные

			вопросы; во время защиты отсутствует вывод
«Не зачтено»	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

3. Типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения основной профессиональной образовательной программы

Образцы индивидуальных заданий
Контрольные и индивидуальные задания
Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
 $2(y + y') = x + 2$.

2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

1. $(x^3 + 2x)y^2 dy = x dx$; 2. $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$; 3. $\frac{y'}{y} = x \cos^2 y$;

4. $y'x^2 e^y = e^{-y}$, $y(1) = 0$; 5. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$, $y(0) = 2$.

3. Решить однородные уравнения

1. $x^2 y' - y^2 = 2x^2$; 2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; 3. $xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-y/x} dx$;

4. $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$; 5. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$; 3. $xy' = y + x^2 \cos x$;

4. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(2) = 1,5$; 5. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

5. Решить уравнение Бернулли

1. $y' = x^3 y^3 - xy$; 2. $xy + 2y = x^5 y$; 3. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$.

6. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1. (y + \frac{2}{x^2})dx + (x + \frac{3}{y^2})dy = 0; \quad 2. \frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy.$$

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1. xy' - xe^{x/y} = 2; \quad 2. xydx + (x+1)dy = 0; \quad 3. xy' + 3xy^3 = 2y;$$

$$4. dy + (3y - e^{3x})dx = 0; \quad 5. (x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0.$$

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1. (xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0; \quad 2. xy' + y = y^2; \quad 3. (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0;$$

$$4. y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); \quad 5. xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + y^2y)dy = 0.$$

10. Решить задачу Коши

$$1. y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}; \quad 2. 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = 1;$$

$$3. ydx = (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy, y(16) = \pi.$$

11. Решить уравнения

$$1. y = x + y' - \ln y'; \quad 2. x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3. y = xy' - (y')^2.$$

Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. y'' + 2xy' = 0; \quad 2. (y-1)y'' = 2(y')^2;$$

$$3. y''' + 3y'y'' = 0; \quad 4. yy'' = 2x(y')^2, y(2) = 2, y'(2) = 0,5.$$

1. Найти общее решение уравнения

$$1. y'' - 2y' + 4y = 0; \quad 2. y'' + 6y' + 9y = 0; \quad 3. y'' + 4y = 0.$$

2. Решить задачу Коши

$$1. 3y'' - 2y' - 8y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 2; \quad 2. y'' + y = 0, y(\frac{\pi}{4}) = 2, y'(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

$$1. f(x) = 3x^2 - 1; \quad 2. f(x) = 3e^{-x}; \quad 3. f(x) = 2 \sin x; \quad 4. f(x) = e^x \cos 2x.$$

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\frac{x}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$; 2. $y^{(4)} - y''' = 5(x + 2)^3$;

3. $(4x + 3)^2 y'' + (4x + 3)y' - 16y = 0$; 4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

$$1) \begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases} \quad . \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad . \quad 4) \begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases} \quad .$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \frac{1}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - y'' + y' + x - 3y = 0,$$

$$4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0.$$

Образцы контрольных заданий

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения первого порядка»

Вариант № 1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1. $(y + y \ln x)dx - (x - xy)dy = 0.$

2. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$

3. $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$

II. Найти частные решения

1. $xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 1.$

2. $e^y dx = (2y - xe^y)dy, \quad y(-1) = 0.$

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Вариант №1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1. $y'' = y' + x.$

2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$

II. Решить задачу Коши:

1. $yy'' + (y')^2 = 0. \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$

2. $y'' - y' = e^{-x} + 2x. \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Образец экзаменационного билета

Билет 1

Дифференциальные уравнения

1. Определение и способ решения дифференциального уравнения Бернулли.

2. Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
3. Найти общее решение уравнения $x^2 y' - \cos 2y = 1$.
4. По виду правой части и корням характеристического уравнения записать частное решение уравнения $y'' + y = 4x \cos x$.
5. Найти частное решение уравнения $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y(e) = 1$.

Примерная тематика курсовых работ

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда
6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций. Применение численных методов.

Перечень примерных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Порядок дифференциального уравнения. Что называют решением дифференциального уравнения?
2. Какое уравнение называется уравнением первого порядка в частных производных? Понятие полного интеграла. Линейные и нелинейные задачи.
3. Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка и его решения. Поле направлений, интегральные кривые О.Д.У.?
4. Какое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными? Метод решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
5. Какие уравнения первого порядка называются линейными? Линейные однородные и неоднородные уравнения? Методы их решения. Уравнение Бернулли и его решение?
6. Какое дифференциальное уравнение называется однородным уравнением первого порядка? Методы его решения.
7. Что такое полный дифференциал? Уравнения в полных дифференциалах? Методы их решения.
8. Что такое математическая модель? Этапы построения математической модели процесса или явления? Примеры простейших моделей на базе дифференциальных уравнений первого порядка?
9. Простейшие уравнения высших порядков и их решения методом понижения порядка?
10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка и их решения? Какие линейные уравнения называются однородными и неоднородными? Теорема о структуре решения линейного однородного и неоднородного уравнения? Решения неоднородного

уравнения в случае специальной правой части, методом вариации произвольных постоянных?

11. Математические модели на базе уравнений второго порядка? Примеры моделей. Краевые задачи.

Вопросы к экзамену:

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений – порядок уравнения, геометрическая интерпретация уравнения и его решения, и т.д. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, стандартный вид и методы решения.
3. Линейные уравнения первого порядка-стандартный вид и методы решения. Уравнение Бернулли.
4. Однородные дифференциальные уравнения – стандартный вид и методы их решения.
5. Уравнения в полных дифференциалах-стандартный вид и методы их решения.
6. Простейшие уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро-стандартный вид и методы их решения.
7. Простейшие уравнения высших порядков-стандартный вид и методы их решения.
8. Линейные однородные уравнения второго порядка-теорема о строении решения и методы его решения.
9. Линейные неоднородные уравнения второго порядка –теорема о строении общего решения и методы решения вариацией произвольных постоянных.
10. Линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью.
11. Общие понятия о системах дифференциальных уравнений. Нормальные системы дифференциальных уравнений.
12. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Классификация краевых задач-линейная, однородная и неоднородная краевая задача.
13. Приближенное интегрирование систем дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.
14. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Уравнения линейные относительно производных (частные случаи интегрирования).