

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

Математическая логика

Направление подготовки

01.03.01- «Математика»

Направленность

Математика

квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Фонд оценочных средств

разработан ст.препод. кафедры «Математический анализ» Аушевой М.А.

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры

«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024г №9

Зав. кафедрой _____ Танкиев И.А.

г. МАГАС, 2024

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
ОПК-2	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК 3.1: Знает общие характеристики процессов сбора, передачи и обработки информации; современное состояние и тенденции развития технических и программных средств автоматизации и компьютеризации в области управления качеством; ОПК 3.2: Умеет понимать и решать профессиональные задачи в области управления научно-исследовательской и производственной деятельности в соответствии с профилем подготовки; ОПК 3.3: Владеет методами решения профессиональных задач с применением информационных технологий и соблюдением требований безопасности
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных

	заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Варианты контрольных работ.

Контрольная работа № 1

1. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы, совершенные конъюнктивные нормальные формы

Построить таблицы истинности для следующих формул алгебры высказываний и привести эти формулы к СДНФ и СКНФ двумя способами (по таблице истинности и с помощью законов алгебры высказываний (как в примерах 10,11 на стр. 9)).

- $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
- $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
- $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
- $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
- $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
- $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$
- $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
- $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
- $(x \vee y \rightarrow z) \leftrightarrow (\neg z \rightarrow \neg(x \wedge y))$
- $((\neg x \vee y) \rightarrow \neg(\neg(x \vee y) \vee z)) \vee \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
- $((\neg(y \vee z) \vee \neg x) \rightarrow \neg(y \vee \neg z)) \wedge \neg(x \vee \neg y \vee z)$
- $(\neg x \vee ((x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \rightarrow (z \wedge \neg(x \wedge y))$
- $(\neg(y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))) \rightarrow (\neg y \wedge z)$
- $(\neg x \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \rightarrow (\neg(\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y))$
- $((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)) \rightarrow \neg(x \vee y \vee \neg z)$
- $(\neg y \vee \neg(z \vee (\neg y \wedge \neg z))) \rightarrow (\neg y \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z))$
- $(\neg(x \vee \neg y \vee z) \vee z) \rightarrow (x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
- $\neg(\neg(x \vee z \rightarrow y) \vee (y \wedge \neg z \rightarrow x \vee (\neg y \wedge \neg z)))$
- $\neg((z \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$
- $(z \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z) \vee (\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y))$

2. Логическое следствие в алгебре высказываний

Проверить истинность соотношений тремя способами (используя определение логического следствия и пп. 3,4 теоремы 2. \vdash

- $x \rightarrow (y \rightarrow z), x \rightarrow y \models x \rightarrow z;$
- $x \rightarrow y \wedge z, \neg x \vee y, \neg z \vee \neg(x \vee y) \models x \vee y;$

3. $\neg(x \rightarrow y), y \vee \neg(x \vee z), y \rightarrow z \models x \rightarrow \neg y$;
4. $x \wedge (y \rightarrow z), x \rightarrow \neg z, y \rightarrow x \wedge z \models y \vee (x \wedge \neg z)$;
5. $x \rightarrow y \vee z, (z \rightarrow \neg x) \wedge (y \rightarrow x) \models x \vee (y \wedge z)$;
6. $y \rightarrow x \vee z, z \rightarrow x \vee y, x \rightarrow y \models x \vee y \vee z$;
7. $x \rightarrow y \vee \neg z, z \rightarrow y \wedge x, \neg(x \wedge y) \models \neg z \rightarrow x$;
8. $(y \wedge (z \rightarrow x)) \wedge (y \rightarrow z), z \vee \neg(y \wedge \neg x) \models x \vee z$;
9. $x \rightarrow \neg(y \vee z), z \rightarrow x \wedge y, x \wedge z \models x \rightarrow z$;
10. $z \vee (y \rightarrow x), x \rightarrow (y \vee \neg z), y \wedge z \rightarrow \neg x \models z \vee \neg x$;
11. $\neg(x \rightarrow y), z \rightarrow x \wedge y, z \vee \neg x \models x \rightarrow \neg(y \wedge z)$;
12. $x \vee \neg y, \neg y \vee z \rightarrow x, \neg x \vee \neg z, y \vee z \models \neg x \vee \neg y$;
13. $x \vee (y \wedge z), y \rightarrow \neg x \wedge \neg z, y \wedge (\neg z \rightarrow x) \models z \vee x$;
14. $\neg y \wedge (x \vee z \rightarrow y), z \vee (x \wedge y), \neg(x \rightarrow y) \models x \vee z$;
15. $x \vee (y \rightarrow z), \neg(x \rightarrow (z \rightarrow y)), ((y \rightarrow x) \rightarrow z) \models x \rightarrow \neg z$;
16. $\neg(x \wedge y \rightarrow z), (\neg y \rightarrow z) \wedge (\neg x \rightarrow z), y \rightarrow x, \neg x \rightarrow x \vee z \models y \vee \neg z$;
17. $x \wedge y \rightarrow \neg z, x \rightarrow \neg y, y \rightarrow x \vee z, y \models z \rightarrow x \vee y$;
18. $\neg(x \rightarrow y) \vee z, z \rightarrow x \vee y, \neg y \wedge ((x \rightarrow \neg z) \vee y) \models z$;
19. $x \rightarrow y \wedge z, z \rightarrow \neg(x \wedge y), x \vee (y \rightarrow z) \models x \vee \neg y$;
20. $x \rightarrow (y \rightarrow z), \neg z \vee x, \neg(y \rightarrow (x \wedge \neg z)) \models z \rightarrow (\neg x \wedge (y \rightarrow z))$;

3. Исчисление высказываний

Пусть Φ, Ψ, X, Θ - формулы исчисления высказываний. Построить вывод формулы исчисления высказываний

из данного множества гипотез.

1. $\Phi \vdash \Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$;
2. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \rightarrow X \vdash \Phi \rightarrow \Psi \wedge X$;
3. $\Phi \rightarrow X, \Psi \rightarrow X \vdash \Phi \vee \Psi \rightarrow X$;
4. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (X \rightarrow \Phi) \rightarrow (X \rightarrow \Psi)$;
5. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \wedge X \rightarrow \Psi \wedge X$;
6. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \vee X \rightarrow \Psi \vee X$;
7. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$;
8. $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi$;
9. $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge (\neg \Phi \vee \Psi)$;
10. $\Phi \vee (\neg \Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi \vee \Psi$;

11. $X \rightarrow \Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash X \wedge \Theta \rightarrow \Psi \vee \neg \Theta$;
12. $\Phi \rightarrow X, \Psi \wedge \Phi \vdash \Theta \rightarrow X$;
13. $\Theta \rightarrow \Psi, \Theta \wedge \Phi \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee X$;
14. $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$;
15. $\Phi \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$;
16. $\Psi \wedge (\Phi \wedge \Theta) \vdash (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$;
17. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee (\Phi \vee \neg \Theta)$;
18. $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Theta \vdash X \wedge \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta \vee \neg \Phi)$;
19. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Theta \rightarrow \Phi) \rightarrow (\Theta \wedge \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi \vee \Psi)$;
20. $\Phi \vee \Psi \vdash (\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Psi \vee \Theta)$;

4. Алгебраические системы.

Построить подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порожденную множеством X (через $P(B)$

обозначен булеан множества B , т.е. множество всех подмножеств множества B):

1. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{N}; + \rangle, X = \{3, 72\}$;
2. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{N}; +, 8 \rangle, X = \{32\}$;
3. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; + \rangle, X = \{-3, 9, 6\}$;
4. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; +, 4 \rangle, X = \{-16, -8\}$;
5. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; +, - \rangle, X = \{125, 65\}$;
6. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; +, - \rangle, X = \{-36, 171, 51\}$;
7. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; \cdot \rangle, X = \{-8, 4\}$;
8. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; \cdot, 6 \rangle, X = \{132\}$;
9. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; - \rangle, X = \{7, 21\}$;
10. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; -, 15 \rangle, X = \{-5, 25\}$;
11. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Z}; +, \cdot \rangle, X = \{-16, 2\}$;
12. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q}; \cdot \rangle, X = \{1/5, -1/25\}$;
13. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q}; \cdot \rangle, X = \{3/4, 64/27\}$;
14. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{3\}$;
15. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{Q} \setminus \{0\}; \cdot, 1/2 \rangle, X = \{4, -1/2\}$;
16. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{R}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{5}, -1/5\}$;
17. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{R} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{2}/\sqrt[3]{3}, -9/8\}$;
18. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C}; \cdot \rangle, X = \{3i\}$;
19. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C}; \cdot \rangle, X = \{\sqrt{3}/2 - i \cdot 1/2\}$;
20. $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{C} \setminus \{0\}; \cdot \rangle, X = \{i, -i\}$;

Контрольная работа № 2

1. Формулы логики предикатов

Выписать все подформулы данной формулы сигнатуры $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$ и определить свободные и связанные переменные формулы:

1. $\forall x((x + y \leq x) \wedge \neg (x = 0))$;
2. $\exists x(\forall y(x + y = y) \rightarrow (y \leq 0))$;
3. $\forall x \forall y((x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$;

4. $\forall x \forall y (((x \leq y) \wedge (y < x) \rightarrow) x = y);$
5. $\forall x \exists y ((x \leq y) \wedge \neg (x = y) \rightarrow \neg (y \leq x));$
6. $\forall y ((x + 0 = x + y) \rightarrow (y = 0));$
7. $(x + y = 0) \rightarrow (0 \leq x) \vee \exists y (0 \leq y);$
8. $\forall x \exists y ((x \leq y) \rightarrow (x + z \leq y));$
9. $(x \leq y) \rightarrow \exists z \neg (x + z \leq y);$
10. $\forall x ((x \cdot y \leq y) \vee \neg (0 \leq y));$
11. $\exists x ((x + x = x) \wedge \neg (x \cdot x = x));$
12. $\forall y ((x + y = z) \wedge \neg (x = 0) \rightarrow \neg (y = 0));$
13. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow \forall z \neg (y + z = x);$
14. $\forall x ((x \leq y + x) \rightarrow (0 \leq y)) \vee (x = z);$
15. $\forall x (x \cdot x \leq x + x) \wedge \exists y (x + y = 0) \rightarrow (z \leq y);$
16. $\forall x \exists z (z + y = x) \rightarrow (x \cdot y \leq z) \wedge \forall y (x + 0 = y);$
17. $\forall x \forall y (x \cdot y = 0) \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0);$
18. $\exists z ((x + y \leq z) \vee (x + z = y)) \wedge \neg (x = y);$
19. $\forall x \forall y ((x + y = x) \vee \exists z (x \cdot z = y));$
20. $\exists x ((x \cdot y = x + y) \wedge \neg (x = 0) \wedge y \leq x).$

Пусть Φ, Ψ, X - атомарные формулы логики предикатов. Выписать все подформулы данной формулы и определить свободные и связанные переменные формулы:

1. $\neg ((\exists x \forall y \Phi(x, y) \vee \exists x \exists y \Psi(x, y)) \wedge \exists y X(x, y));$
2. $\neg ((\exists x \Phi(x, y) \vee \exists z \Psi(x, z)) \vee \exists x \exists y X(x, y));$
3. $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \wedge \exists y \Psi(x, y)) \wedge \forall x \Psi(x, y);$
4. $\forall x (\forall y \Phi(x, y) \vee \Psi(x, y)) \vee \forall x \exists y X(x, y);$
5. $\neg (\forall x \exists y \Phi(x, y) \rightarrow \forall x \Psi(x, y)) \wedge \forall x \forall z X(x, z);$
6. $\forall x \Phi(x, y) \vee \forall x (\exists y \Psi(x, y) \vee (\exists y X(x, y) \wedge \exists y \Phi(x, y)));$
7. $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \wedge \forall x \exists y \Psi(x, y)) \wedge (\exists y X(x, y) \vee \exists y \Phi(x, y));$
8. $\neg (\forall x \neg (\forall y \Phi(x, y) \wedge y \Psi(x, y))) \rightarrow \exists y \forall x X(x, y);$
9. $\exists x \forall y \Phi(x, y) \rightarrow \neg (\forall x \neg (\forall y \Phi(x, y) \wedge \exists z \Psi(z, y)));$
10. $\exists x (\exists y \Phi(x, y) \vee \forall y \Psi(x, y)) \wedge \forall y (\Phi(x, y) \wedge \Psi(x, y));$
11. $\neg ((\exists x \exists y \Phi(x, y) \wedge \exists x \forall y \Psi(x, y)) \vee \exists x \exists y X(x, y));$
12. $\exists x \Phi(x, y) \vee (\exists x \forall y \Psi(x, y) \rightarrow \exists x \exists y X(x, y));$
13. $\forall x (\neg (\exists y \Phi(x, y) \rightarrow \forall y \Psi(x, y)) \vee (\Phi(x, z) \rightarrow \forall y \Psi(x, y)));$
14. $\forall x (\exists y \Phi(x, y) \vee \forall y \Psi(x, y)) \wedge \exists x \neg (\Phi(z, y) \wedge \forall y \Psi(x, y));$
15. $\forall x \Phi(x, y) \rightarrow \exists y (\exists x X(x, y) \rightarrow \Psi(y, z) \vee \Phi(y, z));$
16. $\forall x \exists y \Phi(x, y) \wedge \forall y \forall x \Psi(x, y) \rightarrow \neg X(x, y) \wedge \Phi(x, y);$
17. $\forall x \exists y \neg (\Phi(x, y) \rightarrow \neg \Psi(x, y)) \vee \exists z X(z, y);$
18. $\forall x (\forall y \Phi(x, y) \rightarrow \exists y \Psi(x, y)) \wedge \neg (\exists y X(x, y) \vee \exists y \Phi(x, y));$
19. $\exists x \Phi(x, y) \wedge \forall x \exists y \Psi(x, y) \rightarrow \forall x \exists y X(x, y) \vee \exists y \Psi(x, y);$
20. $\exists y \forall z (\Phi(x, y) \vee \forall x \exists y \Psi(x, y) \rightarrow \exists y X(z, y)) \vee \exists y \Phi(x, y).$

2. Истинность формулы логики предикатов в алгебраической системе

В следующих задачах предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ заданы на множестве всех действительных чисел. Следует определить:

– множество истинности предиката $\neg P(x)$;

– справедливо ли одно из следующих соотношений $P(x) \rightarrow Q(x)$, $Q(x) \rightarrow P(x)$.

Определить также, истинно или ложно каждое из высказываний:

а) $\forall x P(x)$, б) $\exists x P(x)$ в случаях, когда предикат $P(x)$ рассматривается на указанном в соответствующем задании интервале.

1. $P(x)$ задан в виде $x^2 \leq 4x$, $Q(x)$ – в виде $|x| \leq 4$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(0,4)$;

б) $\exists x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(4, +\infty)$.

2. $P(x)$ задан в виде $|x| \leq 2$, $Q(x)$ – в виде $x^2 < 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, 2]$;

б) $\exists x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-2, 2)$.

3. $P(x)$ задан в виде $x^2 > x$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-1, 0)$;

б) $\exists x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1, +\infty)$.

4. $P(x)$ задан в виде $x^2 - 5x + 4 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 5$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1, 4]$;

б) $\exists x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[4, 5]$.

5. $P(x)$ задан в виде $x^2 + 4x + 4 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[-2, 2]$;

б) $\exists x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0, 2]$.

6. $P(x)$ задан в виде $x^2 - 6x + 8 < 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 4$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(2, 4)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3,4]$.

7. $P(x)$ задан в виде $x^2 \geq 16$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 25 > 0$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, -4)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-4, 4)$.

8. $P(x)$ задан в виде $x^2 > 3x$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 4x > 0$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3, +\infty)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0, 3]$.

9. $P(x)$ задан в виде $|x| > 5$, $Q(x)$ – в виде $x^2 \geq 25$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-6, -5)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-6, 6)$.

10. $P(x)$ задан в виде $4x^2 - 1 > 0$, $Q(x)$ – в виде $x^2 > 1$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0, 5; 1)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(0, 1)$.

11. $P(x)$ задан в виде $x^2 \leq 6x$, $Q(x)$ – в виде $|x| \leq 6$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(0, 6)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(6, +\infty)$.

12. $P(x)$ задан в виде $|x| \leq 4$, $Q(x)$ – в виде $x^2 < 1$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, 4]$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-4, 4)$.

13. $P(x)$ задан в виде $x^2 > 2x$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 2$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-2, 0)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[2, +\infty)$.

14. $P(x)$ задан в виде $x^2 - 5x + 6 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 5$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1,4]$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3,6]$.

15. $P(x)$ задан в виде $x^2 + 6x + 9 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 2$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[-3,3]$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0,3]$.

16. $P(x)$ задан в виде $x^2 - 7x + 10 < 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 5$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(2,6)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1,6]$.

17. $P(x)$ задан в виде $x^2 \geq 9$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 16 > 0$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, -3)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-4,4)$.

18. $P(x)$ задан в виде $x^2 > 5x$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 7x > 0$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3, +\infty)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0,7]$.

19. $P(x)$ задан в виде $|x| > 8$, $Q(x)$ – в виде $x^2 \geq 16$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-5,0)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-8,8)$.

20. $P(x)$ задан в виде $9x^2 - 1 > 0$, $Q(x)$ – в виде $x^2 > 4$:

а) $\forall xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0;1)$;

б) $\exists xP(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-1,2)$.

3. Исчисление предикатов

Пусть Φ, Ψ, X, Θ - формулы исчисления предикатов. Построить вывод формулы исчисления предикатов из данного множества гипотез.

1. $\forall y \forall x \Phi(x, y) \vdash \forall y \exists z \Phi(y, z);$
2. $\forall y \forall x \Phi(x, y) \vdash \forall y \exists x \Phi(y, x);$
3. $\forall x \Phi(x, x) \vdash \exists y \exists z \Phi(y, z);$
4. $\exists x \forall y \Phi(x, y) \vdash \exists z \Phi(z, z);$
5. $\forall y \Phi(y) \vdash \exists x (\Phi(x) \vee \Psi(x));$
6. $\exists x \Phi(x) \vee \exists x \Psi(x) \vdash \exists x (\Phi(x) \vee \Psi(x));$
7. $\forall x \Phi(x) \wedge \forall y \Psi(y) \vdash \Phi(u) \wedge \Psi(u);$
8. $\Phi(x) \vdash \Psi(y) \rightarrow \exists x \Phi(x);$
9. $\exists x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)) \vdash \forall x \Phi(x) \rightarrow \exists y \Psi(y);$
10. $\forall x \Phi(x) \rightarrow \forall y \Psi(y) \vdash \neg \Psi(x) \rightarrow \exists y \neg \Phi(y);$
11. $\forall x \Phi(x) \vee \forall y \Psi(y) \vdash \neg \Psi(x) \rightarrow \Phi(y);$
12. $\forall y \exists x (\Phi(x, y) \rightarrow \Psi(y)) \vdash \forall x (\forall z \Phi(z, x) \rightarrow \Psi(x));$
13. $\exists x \exists y (\Phi(x) \wedge \Psi(x, y)) \vdash \exists x \Phi(x) \wedge \exists y \exists z \Psi(y, z);$
14. $\forall y \Phi(y) \vee \forall x \exists y \Psi(x, y) \vdash \forall x \exists z (\Phi(x) \vee \Psi(x, z));$
15. $\exists x \forall y (\Phi(x, y) \wedge \Psi(x)) \vdash \forall x \exists z \Phi(z, x) \wedge \exists x \Psi(x);$
16. $\forall y (\Phi(x, y) \vee \Psi(x)) \vdash \exists x \exists z \Phi(z, x) \vee \exists x \Psi(x);$
17. $\exists x \forall y \exists z \Phi(x, y, z) \vdash \exists u \forall v \exists w \Phi(v, u, w);$
18. $\exists x \forall y \Phi(x, y, y) \vdash \forall u \exists z \exists v \Phi(z, u, v);$
19. $\forall x \exists z \forall y \Phi(x, y, z) \vdash \forall u \forall v \exists w \Phi(v, u, w);$
20. $\exists y \forall x \Phi(x, y, y) \vdash \exists u \exists y \exists z \Phi(u, y, z).$

4. Машины Тьюринга

Построить машину Тьюринга T , вычисляющую следующую функцию.

1. $x + 1;$
2. $x + y;$
3. $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

4. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
5. $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$
6. $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$
7. $\frac{x}{2};$
8. $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor;$
9. $\frac{x-y}{3};$
10. $\left\lfloor \frac{x-y}{3} \right\rfloor;$
11. $\frac{2}{2x+y};$
12. $\left\lfloor \frac{2}{2x+y} \right\rfloor;$
13. $\frac{3}{x+3y};$
14. $\left\lfloor \frac{3}{x+3y} \right\rfloor;$
15. $f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2, \\ y & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
16. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } x = 2, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
17. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < y, \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
18. $f(x, y) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \text{ делится на } 2, \\ y - 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
19. $f(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = y + 1, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
20. $f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2, \\ y, & \text{если } y = 3, \\ z & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Вопросы к зачёту:

1. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.
2. Тождественная истинность выводимых формул.
3. Непротиворечивость исчисления высказываний.
4. Предикаты. Логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл.
5. Кванторы. Геометрический смысл квантора существования.
6. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные.
7. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы.

8. Эквивалентные формулы логики предикатов. Правила преобразования формул в эквивалентные. Нормальная форма.
9. Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Тавтологическая истинность выводимых формул.
10. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.
11. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча.
12. Примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика.
13. Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем.
14. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости.
15. Теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.
16. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно-рекурсивные функции.