

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки

01.03.01- «Математика»

Направленность

Математика

квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Фонд оценочных средств

разработан

_____ Кодзоева Ф. Дж. доцент, к.ф.-м.н.

(подпись) Ф.И.О., должность, ученая степень, ученое звание

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры

«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024г. №9

Зав. кафедрой _____ Танкиев И.А.

(попись)

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица1.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК 1.1: Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК 1.2: Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК 1.3: Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов УК1.4: При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формулирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения. УК 1.5.: Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки	Знать: цели и задачи научных исследований по направлению деятельности, базовые принципы и методы их организации; основные источники научной информации и требования к представлению информационных материалов; способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирования задач различных групп; формулировки известных утверждений, следствий из них; Уметь: составлять общий план работы по заданной теме, предлагать методы исследования и способы обработки результатов, проводить исследования по согласованному с руководителем плану, представлять полученные результаты; выбирать наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике; пользоваться отработанными и

			малоизвестными методами анализа;
<i>ОПК-1</i>	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>Знает: Методы исследования, применяемые в математическом анализе, комплексном и функциональном анализе, алгебре, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логик, теории вероятностей, математической статистике и случайных процессах, численных методах, теоретической механике.</p> <p>Умеет: Публично доказывать и объяснять фундаментальные результаты, соответствующих разделам математики</p> <p>Владеет: Навыками строгого доказательства утверждений в области математического анализа комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики случайных процессов, численных методов, теоретической механики</p>	<p>Владеть: систематическими знаниями по направлению деятельности; углубленными знаниями по выбранной направленности подготовки, базовыми навыками проведения научно-исследовательских работ по предложенной теме; возможности современных научных методов на уровне, необходимом для постановки и решения задач, имеющих естественно-научное содержание; методики доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода.</p>
<i>ПК-3</i>	Способен определить общие формы и закономерности отдельной предметной области	<p>Знает особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики.</p> <p>Умеет системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы.</p> <p>Владеет современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры данной дисциплины.</p>	

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса

Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы
Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод

Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы
---	--	--

Таблица 5.

Оценивание ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов Контрольная работа по теме: «Евклидовы пространства»

- Записать неравенство Коши-Буняковского в различных конкретных евклидовых пространствах:
 - в евклидовых пространствах V_2 и V_3 ;
 - в евклидовом арифметическом пространстве R^n ;
 - в евклидовом пространстве $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.
- Вычислить скалярное произведение и нормы функций $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + x$ в $C[0, 1]$
- Найти угол между $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ и $g(x) = x^{\frac{3}{4}}$ в $C[0, 1]$.
- Доказать, что в R^2 скалярное произведение можно определить следующим образом: $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$.

Контрольная работа по теме: «Гильбертовы пространства»

1. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$,

если: $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots), \lambda_n \in \mathbb{R}, |\lambda_n| \leq 1$.

2. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$,

если: $Ax = (x_2, x_3, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

3. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$,

если: $Ax = (x_1, x_2, \dots, 0, 0, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

4. Найти сопряженный оператор к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$,

если: $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$, при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Контрольная работа по теме «Банаховы пространства»

1. Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

2. Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств.

3. Показать, что $C[a, b]$ сепарабельное банаховое пространство.

4. Доказать, что $l_p^n(\mathbb{R}), l_p(\mathbb{R}), p \neq \infty$ сепарабельное банаховое пространство.

Тестовые задания

Вариант 1.

1. Множества A и B называется равномощными, если:

а) существует взаимно-однозначное отображение $\varphi: A \rightarrow B$

б) существует отображение $\psi: A \rightarrow B$

в) если $A \subset B$ и $B \subset A$

2. Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность:

а) счетную,

б) c ,

в) 2^c .

3. Пространство $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ является:

а) полным

б) неполным

в) сепарабельным

4. Компактное подмножество A хаусдорфова пространства:

а) хаусдорфово,

б) замкнуто,

в) открыто.

5. Исключите свойство, не имеющее отношения к понятию меры на алгебре множеств:

а) $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(A) \geq 0$

б) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$

в) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых A, B принадлежащих заданной алгебре множеств.

Вариант 2

1. Мощность множества понимается как количество элементов множества, если:

а) множество конечно,

б) множество счетно,

в) множество пусто

2. Какое из данных множеств не обладает мощностью гиперконтинуума:

а) множество всех функций, заданных на $[a, b]$,

б) множество \mathbb{R}^n ,

в) множество всех подмножеств плоскости?

3. Пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ является:

а) неполным

б) полным

в) сепарабельным

4. Внутренность множества A обозначается:

а) $O(A)$,

б) $\text{int } A$

в) $X \setminus A$

5. Мера Лебега канторовского множества равна:

- 1) 1
- 2) 0
- 3) не определена.

Вариант 3.

1. Известно, что $A \subset B$, тогда

- а) $|A| < |B|$
- б) $|A| \neq |B|$
- в) $|A| = |B|$
- г) нет верного ответа.

2. Какое из приведенных свойств не является аксиомой метрики:

- 1) $\rho(x, x) = 0$
- 2) $\rho(x, y) = -\rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(y, x) = \rho(x, z)$?

3. Какое из приведенных пространств не является полным:

- а) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$
- б) пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$
- в) $C([a, b])$ с метрикой $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$?

4. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ на R со стандартной топологией

- а) открыто,
- б) не открыто,
- в) замкнуто,
- г) не замкнуто.

5. Алгебра всегда является:

- а) кольцом,
- б) полукольцом,
- в) σ - алгеброй.

Вариант 4.

1. Если $A \subset B \subset C$ и $|A| = |C|$, то

а) $|A| = |B|$

б) $|A| = |B| = |C|$

в) $|A| \neq |B|$

2. Какое из приведенных ниже пространств не является метрическим:

а) $C[0,1]$,

б) R ,

в) L_p

г) нет верного ответа?

3. Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b |f(x)| dx = o(1)$ и $f(x) = 0$ в любой точке $x \in [a, b]$ (2), тогда:

а) $(1) \Rightarrow (2)$

б) $(2) \Rightarrow (1)$

в) $(1) \Rightarrow (2)$

4. Пусть Q - множество рациональных точек на R , тогда:

а) Q - компактно,

б) Q - не компактно,

в) $R \setminus Q$ - компактно.

5. Пространство $L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$

а) сепарабельно,

б) неполное

в) содержит только непрерывные функции

Вопросы к экзамену.

Шестой учебный семестр

1. Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств.
2. Счетные множества и множества мощности континуум.
3. Метрические пространства
4. Открытые и замкнутые множества
5. Компактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
6. Полнота и пополнение. Теорема о стягивающихся шарах.
7. Принцип сжимающих отображений.
8. Топологические пространства.
9. Евклидовы пространства; определение нормированных пространств, примеры.
 10. Неравенство Коши-Буняковского. Примеры.
 11. Определение нормированного комплексного пространства.
 12. Определение счетно-аддитивной и внешней меры.
 13. Определение измеримой функции.
 14. Понятия сходимости для измеримых функций..
 15. Меры и измеримые множества. \mathcal{B} -алгебра борелевских множеств.
 16. Измеримые функции и интеграл Лебега.
 17. Определение интегрируемой по мере μ функций.
18. Примеры мер μ_α и отвечающие им интегралы.

Седьмой учебный семестр

1. Евклидовы пространства; определение нормированных пространств, примеры.
2. Ортогональные системы.
3. Неравенство Бесселя.
4. Неравенство Коши-Буняковского. Примеры.
5. Определение нормированного комплексного пространства.
6. \mathcal{B} -кольцо множеств.
7. Определение счетно-аддитивной и внешней меры.
8. Определение измеримой функции.
9. Понятия сходимости для измеримых функций.
10. Линейное отображение и теорема об ограниченном линейном отображении.
11. Меры и измеримые множества. \mathcal{B} -алгебра борелевских множеств.
12. Измеримые функции и интеграл Лебега.
13. Определение интегрируемой по мере μ функций.
14. Теорема Леви о монотонной сходимости.
15. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
16. Теорема Фату о сходимости последовательности интегрируемых неотрицательных функций.

17. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
18. Примеры мер μ_α и отвечающие им интегралы.
19. Мера Дирака, канторово множество, канторово лестница.
20. Определения и теоремы борелевской меры μ .
21. Теорема Лебега о разложении.
22. Определение сингулярной меры.
23. Теорема Радона-Никодима, Лебега.
24. Теорема Фубини.
25. Теорема о произведении мер.
26. Определение и примеры гильбертовых пространств.
27. Определение прямой суммы.
28. Ортогональная проекция.
29. Теорема об ортогональной проекции.
30. Определение сопряженного пространства.
- 31.** Теорема Рисса.