

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки  
*01.03.01- «Математика»*

Направленность  
*Математика*

квалификация выпускника  
*Бакалавр*

Форма обучения  
*Очная*

Фонд оценочных средств  
разработан \_\_\_\_\_ Танкиевым И.А., профессор, к.ф.-м.н.

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры  
«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024г №9

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Танкиев И.А.

**1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица1.

**Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы**

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК 6.1: Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов при достижении поставленных целей; УК 6.2: Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста. УК 6.3: Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК 6.4:Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития;	Знать: Цели и задачи научных исследований по направлению деятельности, базовые принципы и методы их организации; основные источники научной информации и требования к представлению информационных материалов; способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирование задач различных групп, формулировка известных утверждений, следствий из них Уметь: Составлять общий план работы по заданной теме, предлагать методы и способы обработки результатов, проводить исследования по согласованному с руководителем плану, представлять полученные результаты, выбирать наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в

			математике.
ПК-1	Способен определить общие формы и закономерности отдельной предметной области	<p>Знает: особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики.</p> <p>Умеет: системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы.</p> <p>Владеет: современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры.</p>	<p>Владеть:</p> <p>систематическими знаниями по направлению деятельности;</p> <p>углубленным знаниями по выбранной направленности подготовки, базовыми навыками проведения научно-исследовательских работ по предложенной теме.</p>
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических или естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности		<p>Знает: Методы исследования, применяемые в математическом анализе, комплексном и функциональном анализе, алгебре, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логике, теории вероятностей, математической статистике и случайных процессах, численных</p>

			<p>методах, теоретической механике.</p> <p>Умеет: Публично доказывать и объяснять фундаментальные результаты в соответствующих разделах математики.</p> <p>Владеет: Навыками строгого доказательства утверждений в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математике и математической логики, теории вероятностей, математической статистике и случайных процессов, численных методов и теоретической механике.</p>
--	--	--	--

## 2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

### Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-балльная шкала	91-100	81-90	61-80	0-60
Бинарная	Зачтено			Не зачтено

шкала		
-------	--	--

Таблица 3.

### Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий);</li> <li>- Самостоятельность ответа;</li> <li>- Культура речи.</li> </ul>	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории,

		недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

#### Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или</li> </ul>	<p>выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её</p>

	<p>аргументированность изложения (последовательность действий);</p> <p>- Самостоятельность ответа;</p> <p>- Культура речи.</p>	<p>актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы</p>
Хорошо (базовый уровень)		<p>основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы</p>
Удовлетворительно (пороговый уровень)		<p>имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод</p>
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		<p>тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное</p>

		непонимание проблемы
--	--	----------------------

Таблица 5.

**Оценивание ответа на зачете**

«Зачтено»	4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
	Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Полнота изложения теоретического материала;</li> <li>- Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий);</li> <li>- Самостоятельность ответа;</li> <li>- Культура речи.</li> </ul>	<p>выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы</p>



	Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
	Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы
«Не зачтено»			

**3. Типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения основной профессиональной образовательной программы**

**Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

1. Определение множества, подмножества. Множество, ограниченное сверху (снизу), просто ограниченное.
2. Определение точной верхней (нижней) грани множества.
3. Определение простой, сложной, обратной функции.
4. Определение четной, нечетной и периодической функции.
5. Определение возрастающей, убывающей, строго монотонной функции в точке, на отрезке  $[a, b]$
6. Способы задания функции.
7. Определение последовательности.
8. Определение последовательности, ограниченной сверху (снизу), просто ограниченной.
9. Определение бесконечно большой (б. б.) последовательности (бесконечный предел).
10. Определение бесконечно малой (б. м.) последовательности (нулевой предел)
11. Доказать теорему о сумме двух б.м. последовательностей.
12. Доказать теорему о разности двух б.м. последовательностей.
13. Доказать теорему об ограниченности двух б.м. последовательностей.
14. Доказать теорему о произведении б.м. на ограниченную последовательность.
15. Доказать теорему о переходе б.м. в б.б. последовательность и наоборот.
16. Определение сходящейся последовательности (конечный предел).
17. Доказать основную теорему о сходящейся последовательности.
18. Доказать теорему о единственности предела сходящейся последовательности.
19. Доказать теорему об ограниченности сходящейся последовательности.
20. Доказать теорему об арифметических действиях со сходящимися последовательностями.
21. Достаточные условия отсутствия предела последовательности.
22. Определение расходящейся последовательности.
23. Доказать отсутствие предела последовательности  
$$(-1)^n, \{2^{n(-1)^n}\}, \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}, \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}.$$
24. Определение возрастающей, убывающей, строго монотонной последовательности.
25. Определение невозрастающей, неубывающей, монотонной последовательности.
26. Доказать теорему о сходимости монотонной ограниченной последовательности.
27. Теорема о сходимости последовательности  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$
28. Доказать теорему о пределе промежуточной последовательности.
29. Определение конечного и бесконечного пределов функции в точке.
30. Достаточные условия отсутствия предела функции.
31. Найти предел функции  $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$ , при  $x \rightarrow \infty$ .
32. Определение б.м. и б.б. функции в точке.
33. Определение б.м. функций одного порядка.
34. Определение эквивалентных б.м. функций.
35. Определение б.м. функции более высокого порядка малости.
36. Свойства значка  $\circ ( )$ .
37. Определение б.б. функций одного порядка роста.

38. Определение б.б. функции более высокого порядка роста.
39. Доказать первую теорему о существовании предела функции в точке.
40. Теорема об арифметических действиях с пределами функций.
41. Определение односторонних (правого и левого) пределов функции в точке.
42. Вторая теорема о существовании предела функции в точке.
43. Доказать теорему об арифметических действиях с непрерывными функциями.
44. Доказать первый замечательный предел.
45. Доказать второй замечательный предел.
46. Таблица эквивалентных функций.
47. Первое и второе определения непрерывной функции в точке.
48. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \sin nx, y = \cos nx, y = x^3, y = x^4, y = e^{nx}$  при  $x \in R$ .
49. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \ln x$  при  $x > 0$ .
50. Определение односторонней (левой и правой) непрерывности функции в точке.
51. Теорема о непрерывности функции в точке.
  - Классификация точек разрыва функции.
  - Исследовать на непрерывность функции:
 
$$y = \sin \frac{1}{x}, y = \cos \frac{1}{x}, y = e^{1/x}, y = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}, y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$$
 в точке  $x=0$ .
  - Доказать теорему о непрерывности сложной функции в точке.
  - Определение производной функции. Ее геометрический и физический смысл.
  - Уравнение касательной и нормали к графику функции.
52. Определение дифференцируемой функции.
53. Доказать теорему о дифференцируемости функции.
54. Доказать теорему о непрерывности дифференцируемой функции.
55. Определение дифференциала функции.
56. Доказать теорему о производной суммы и разности двух функций.
57. Доказать теорему о производной произведения двух функций.
58. Доказать теорему о производной частного двух функций.
59. Исходя из определения, найти производную функции
 
$$y = x^a, y = x^3, y = x^4, y = \sin ax, y = \sin(ax^2), y = \cos ax, y = \cos(ax^2), y = e^{ax}, y = e^{-ax^2}, y = 2^{-ax^2}, y = \ln nx$$
65. Таблица производных элементарных функций.
  66. Доказать теорему о производной сложной функции.
  67. Доказать теорему о производной обратной функции.
  68. Исходя из теоремы о производной обратной функции, найти производную функции
 
$$y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccot} x, y = \arcsin x, y = \arccos x.$$
  69. Определение параметрически заданной функции.
  70. Первая производная параметрически заданной функции.
  71. Односторонние (левая и правая) производные функции в точке.
  72. Теорема о существовании производной функции в точке.
  73. Найти производную функции  $y = |x|, y = \sqrt[3]{x^2}, y = \sqrt[5]{x^4}$  в точке  $x=0$ .
  74. Доказать инвариантность формы первого дифференциала.
  75. Свойства первых дифференциалов.
  76. Таблица первых дифференциалов.
  77. Определение возрастающей, убывающей, строго монотонной функции в точке.
  78. Доказать теорему о достаточных условиях монотонности дифференцируемой функции в точке.
  79. Определение точек локального максимума, минимума, экстремума функции.

80. Доказать теорему Ферма (о необходимых условиях экстремума дифференцируемой функции).

81. Определение стационарной точки дифференцируемой функции.

82. Доказать теорему Ролля (о нуле производной).

83. Доказать теорему Лагранжа (формула конечных приращений).

84. Доказать теорему Коши (обобщенная формула конечных приращений).

85. Правило Лопиталя.

86. Формула Тейлора.

87. Написать первые три ненулевых члена ряда Тейлора функции  $y = x^4$ ,  $y = x^5$  в точке  $x_0 = 1$ .

88. Формула Маклорена.

89. Написать первые три ненулевых члена ряда Маклорена функции  $y = (x-1)^4$ ,  $y = (x-1)^5$ ,  $y = (x-1)^6$ .

90. Доказать теорему о необходимых условиях экстремума функции.

91. Определение критической точки функции.

92. Доказать теорему о достаточных условиях экстремума функции.

93. Определение выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции.

94. Теорема о достаточных условиях выпуклости (вогнутости) дифференцируемой функции.

95. Определение точки перегиба дифференцируемой функции.

96. Необходимые условия точки перегиба дифференцируемой функции.

97. Достаточные условия точки перегиба дифференцируемой функции.

98. Определение наклонной (правой, левой) и вертикальной асимптоты графика функции.

99. Теорема о наклонной асимптоте графика функции.

#### Дополнительные вопросы

1. Всякая ли дифференцируемая функция является непрерывной?
2. Всякая ли непрерывная функция является дифференцируемой?
3. Всякая ли дифференцируемая в точке функция имеет касательную к графику в этой точке?
4. Всякая ли стационарная точка является критической?
5. Всякая ли критическая точка является стационарной?

### Контрольные работы

#### Контрольная работа № 1. Вычисление пределов.

Мат. Анализ. №1	Мат. Анализ. №2
Вычислить пределы:	Вычислить пределы:
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right)^x$	1) $\lim_{x \rightarrow 1} (5^x - 4)^{\operatorname{ctg}(x-1)}$
2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x}) \ln(x)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$	2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$
3) $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-1)}}$	3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26+x} - \sqrt[3]{28-x}}{x - \sqrt{x}}$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^{x^2+2x+1} - 3^{1+x}}{\ln(3x^2 - 2)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x \sin x} - 1}{x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[20]{\cos 2\pi x} - 1}{\sin^2(x-1)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 1} \right)^{x^2}$$

Контрольная работа № 2. Производная функции.

Мат. Анализ. №3

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3 - \sqrt{x+7})}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4^x - 3)}{\operatorname{tg}(x-1)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\ln \cos 2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 3x - 1} \right)^x$$

Мат. Анализ. №4

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \ln(x+1) - \ln x)^x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2) \ln(x-1)}{x^4 - 8x^2 + 16}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{e^{x-1}} - 1}{\sin \pi x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - 2}{2 - \sqrt{x+3}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (4^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Мат. Анализ. №1

1) Найти производную  $y'$ :  $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^{\ln(3x+2)}$ ;

2) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:

$$x = e^{-2t}(2 - t^2), \quad y = e^{-2t}(t^2 + 2t);$$

3) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной неявно:  
 $y^2 - 2 \ln y - x^2 = 2e^x$ ;

4) Вычислить следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4^{\cos(x)}}{4x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Мат. Анализ. №2

1) Найти производную  $y'$ :  $y = \operatorname{th}\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^{\operatorname{ctg}(3x+2)}$ ;

2) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:

$$x = 5t + \operatorname{ctg}(5t), \quad y = 5t - \operatorname{tg}(5t);$$

3) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной неявно:  
 $y^3 x + \ln(\sin x) = \sin y$ ;

4) Вычислить следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(4x))}{4x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Мат. Анализ. №3

1) Найти производную  $y'$ :  $y = \cos\left(\sqrt[7]{x^3}\right)^{\ln(5x+2)}$ ;

2) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:

$$x = 2t - \operatorname{sh}(2t), \quad y = 2t - \operatorname{ch}(2t);$$

3) Найти производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной неявно:

$$y^2 x + \ln(\cos x) = \cos y;$$

4) Вычислить следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^6}; \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

Мат. Анализ. №4

1) Найти производную  $y'$ :  $y = \operatorname{ctg} \left( \sqrt[9]{x^5} \right)^{\operatorname{th}(3x+6)}$ ;

2) Найти производные  $y'_x, y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:

$$x = e^{-3t} \operatorname{ch} t, y = e^{-3t} \operatorname{sh} t;$$

3) Найти производные  $y'_x, y''_{xx}$  от функции  $y=y(x)$ , заданной неявно:  
 $2y^2 + \ln(\sin x) = x \cos y;$

4) Вычислить следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x - \sin^2 x}{5x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(ex + e))^{\operatorname{ctg} x}$

Контрольная работа № 3. Дифференциал функции и производная высшего порядка.

Мат. Анализ. №1

1) Найти дифференциал  $dy$ :  $y = \operatorname{tg} \left( \sqrt[4]{x^3} \right)^{\ln(3x+2)}$ ;

2) Найти производную  $y^{(100)}$ :  $y = (2x^2 + x) \ln(2x + 1);$

3) Разложить функцию по целым неотрицательным степеням двучлена  $x + 2$  до четвертого члена:  $y = \sin(6 - 2x).$

4) Разложить по целым неотрицательным степеням переменной  $x$ :

$$y = \sqrt[3]{1 + \sin(x^2)} \text{ до члена с } x^{10}; y = \ln \frac{2 \cos(x^2) - 2}{x^4} \text{ до члена с } x^{12}.$$

Мат. Анализ. №2

1) Найти дифференциал  $dy$ :  $y = th(\sqrt[5]{x^2})^{ctg(3x+2)}$  ;

2) Найти производную  $y^{(50)}$ :  $y = (3x^2 + 2x)\cos(3x + 2)$  ;

3) Разложить функцию по целым неотрицательным степеням двучлена  $x - 2$  до четвертого члена:  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+6}}$  .

4) Разложить по целым неотрицательным степеням переменной  $x$ :

$y = \sqrt[3]{\cos(x^2)}$  до члена с  $x^8$  ;  $y = \ln \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$  до члена с  $x^4$  .

Мат. Анализ. №3

1) Найти дифференциал  $dy$ :  $y = \cos(\sqrt[7]{x^3})^{\ln(5x+2)}$  ;

2) Найти производную  $y^{(100)}$ :  $y = (3x^2 + x)\sin(3x + 1)$  ;

3) Разложить функцию по целым неотрицательным степеням двучлена  $x + 3$  до четвертого члена:  $y = \ln(1 - 2x)$  .

4) Разложить по целым неотрицательным степеням переменной  $x$ :

$y = \sqrt[4]{\cos(x^3)}$  до члена с  $x^{12}$  ;  $y = \ln \frac{6\sin(x^2) - 6x^2}{x^6}$  до члена с  $x^8$  .

Мат. Анализ. №4

1) Найти дифференциал  $dy$ :  $y = ctg(\sqrt[9]{x^5})^{th(3x+6)}$  ;

2) Найти производную  $y^{(50)}$ :  $y = (5x + x^2)2^{(3x+1)}$  ;

3) Разложить функцию по целым неотрицательным степеням двучлена  $x - 4$  до четвертого члена:  $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}}$  .

4) Разложить по целым неотрицательным степеням переменной  $x$ :

$y = \sqrt[4]{1 - \sin(x^3)}$  до члена с  $x^{15}$  ;  $y = \ln \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2}$  до члена с  $x^3$  .



Контрольная работа № 5. Определенный интеграл и его приложения.

<p>Мат. Анализ. №1</p> <p>1) Найти длину дуги кривой</p> $x^2 + y^2 = 4y + 4x - 4$ , ограниченной прямой $x + y \leq 2$ , объем тела, полученного вращением данной фигуры вокруг оси Oy, площадь поверхности данного тела. <p>2) Вычислить площадь фигуры, заданной параметрически:</p> $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}, y = 15,$ $(0 < x \leq 20\pi, y \geq 15).$ <p>3) Вычислить площадь фигуры, заданной в полярных координатах: <math>r \geq 1 + \cos \varphi</math>, <math>r \leq 1</math>.</p> <p>4) Вычислить интеграл: <math>\int_0^{\pi} x \cos 2x dx</math>.</p>	<p>Мат. Анализ. №2</p> <p>1) Найти длину дуги кривой</p> $x^2 + y^2 = -6y + 2x - 6$ , ограниченной прямой $y + x \geq 0$ , объем тела, полученного вращением данной фигуры вокруг оси Ox, площадь поверхности данного тела. <p>2) Вычислить площадь фигуры, заданной параметрически: <math>y = 8 - 4\sqrt{3}</math>,</p> $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases},$ $(0 < x \leq 16\pi, y \geq 8 - 4\sqrt{3}).$ <p>3) Вычислить площадь фигуры, заданной в полярных координатах: <math>r \leq 3 \sin 3\varphi</math>, <math>r \geq 1</math>.</p> <p>4) Вычислить интеграл:</p> $27 \int_0^1 x^3 \sqrt{4 - 3x^2} dx$ .
<p>Мат. Анализ. №3</p> <p>1) Найти длину дуги кривой</p> $x^2 + y^2 = 2y + 6x - 6$ , ограниченной прямой $x + y \leq 2$ , объем тела, полученного вращением данной фигуры вокруг оси Oy, площадь поверхности данного тела. <p>2) Вычислить площадь фигуры, заданной параметрически:</p>	<p>Мат. Анализ. №4</p> <p>1) Найти длину дуги кривой</p> $x^2 + y^2 = 4x - 8y - 16$ , ограниченной прямой $x - y \geq 8$ , объем тела, полученного вращением данной фигуры вокруг оси Ox, площадь поверхности данного тела. <p>2) Вычислить площадь фигуры, заданной параметрически: <math>y = 12 + 6\sqrt{3}</math>,</p>

$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}, y \geq 3,$ $(0 < x \leq 12\pi, y \geq 3).$ <p>3) Вычислить площадь фигуры, заданной в полярных координатах: <math>r \geq 3 \sin 4\varphi</math>, <math>r \leq 1</math>.</p> <p>4) Вычислить интеграл: <math>75 \int_0^1 x^5 \sqrt{9 - 5x^3} dx</math>.</p>	$\begin{cases} x = 12(t - \sin t) \\ y = 12(1 - \cos t) \end{cases},$ $(0 < x \leq 24\pi, y \geq 12 + 6\sqrt{3}).$ <p>3) Вычислить площадь фигуры, заданной в полярных координатах: <math>r \leq 1 + \sin \varphi</math>, <math>r \leq 1</math>.</p> <p>4) Вычислить интеграл: <math>\int_0^{\pi} x \sin 4x dx</math>.</p>
---	--

Контрольная работа № 6. Функции многих переменных.

<p>Мат. Анализ. №1</p> <p>1) Найти полный дифференциал второго порядка <math>d^2u</math> и вторую частную производную <math>\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}</math> от функции <math>u = f(\xi, \eta)</math>, где <math>\xi = 3x - 2y, \eta = -3x - 2y^2</math></p> <p>2) Для функции <math>z = z(x, y)</math> найти частные производные первого и второго порядка <math>2x^2 - 3y - 2z^2 = \sin(3z)</math></p> <p>3) Вводя новые независимые переменные, преобразовать уравнения <math>\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0</math>, если <math>\xi = \frac{y}{x}, \eta = x</math></p> <p>4) Исследовать на экстремум <math>z = e^{4x-y}(2 - 4x^2 + 2y)</math></p>	<p>Мат. Анализ. №2</p> <p>1) Найти полный дифференциал второго порядка <math>d^2u</math> и вторую частную производную <math>\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}</math> от функции <math>u = f(\xi, \eta)</math>, где <math>\xi = 3x^2 - 2y, \eta = 5y - 3x</math></p> <p>2) Для функции <math>z = z(x, y)</math> найти частные производные первого и второго порядка <math>3x^2 - 2y - 2z = \ln(2z)</math></p> <p>3) Вводя новые независимые переменные, преобразовать уравнения <math>\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0</math>, если <math>\xi = y, \eta = xy</math></p> <p>4) Исследовать на экстремум</p>
---	---

	$z = e^{x+2y}(4x + 2y^2 - 4)$
<p>Мат. Анализ. №3</p> <p>1) Найти полный дифференциал второго порядка <math>d^2u</math> и вторую частную производную <math>\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}</math> от функции <math>u = f(\xi, \eta)</math>, где <math>\xi = 4x + 2y^2, \eta = 2x - 3y</math></p> <p>2) Для функции <math>z = z(x, y)</math> найти частные производные первого и второго порядка <math>3x - 2y^2 - 3z^2 = \cos(3z)</math></p> <p>3) Вводя новые независимые переменные, преобразовать уравнения <math>\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0</math>, если <math>\xi = 2y, \eta = \frac{x}{y}</math></p> <p>4) Исследовать на экстремум <math>z = e^{2y-x}(2x - y^2 + 2)</math></p>	<p>Мат. Анализ. №4</p> <p>1) Найти полный дифференциал второго порядка <math>d^2u</math> и вторую частную производную <math>\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}</math> от функции <math>u = f(\xi, \eta)</math>, где <math>\xi = 3y - 2x, \eta = 4x^2 - 6y</math></p> <p>2) Для функции <math>z = z(x, y)</math> найти частные производные первого и второго порядка <math>3x^2 + 3y - 3z^2 = 8\sqrt{z^3}</math></p> <p>3) Вводя новые независимые переменные, преобразовать уравнения <math>3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial z}{\partial y} = 0</math>, если <math>\xi = 2x^2 + 3y, \eta = x</math></p> <p>4) Исследовать на экстремум <math>z = e^{x-y}(3x^2 - 6y - 6)</math></p>

<p>Мат. Анализ. №1</p> <p>1) Вычислить <math>\iint_D xy dx dy</math>, где D:  <math>x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y</math>.</p> <p>2) Изменить порядок интегрирования</p> $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ <p>3) В двойном интеграле <math>\iint_D f(x, y) dx dy</math> перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования. D:  <math>x^2 + y^2 \leq 4x, x \leq 2, y \geq 0</math>.</p> <p>4) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  <math>xy = 4, y = 4x, y = 1</math>.</p>	<p>Мат. Анализ. №2</p> <p>1) Вычислить <math>\iint_D xy dx dy</math>, где D:  <math>x^2 + y^2 \leq -4x, x^2 + y^2 \geq 4y, y \geq 0</math>.</p> <p>2) Изменить порядок интегрирования</p> $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy + \int_e^{e^2} dx \int_0^{2-\ln x} f(x, y) dy$ <p>3) В двойном интеграле <math>\iint_D f(x, y) dx dy</math> перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования. D:  <math>x^2 + y^2 \leq -6y, y \geq -4.5, x \geq 0</math>.</p> <p>4) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  <math>x = 5 - y^2, y = 2x, y = 0</math>.</p>
<p>Мат. Анализ. №3</p> <p>1) Вычислить <math>\iint_D xy dx dy</math>, где D:  <math>x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \leq -4y</math>.</p> <p>2) Изменить порядок интегрирования</p> $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^6 dx \int_0^{\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy$ <p>3) В двойном интеграле <math>\iint_D f(x, y) dx dy</math> перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования. D:  <math>x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq 1.5, x \geq 0</math>.</p> <p>4) С помощью двойного интеграла вычислить</p>	<p>Мат. Анализ. №4</p> <p>1) Вычислить <math>\iint_D xy dx dy</math>, где D:  <math>x^2 + y^2 \leq -2x, x^2 + y^2 \leq -2y, y \leq 0</math>.</p> <p>2) Изменить порядок интегрирования</p> $\int_0^5 dx \int_0^{\sqrt{10x-x^2}} f(x, y) dy + \int_5^{10} dx \int_0^{\sqrt{50-5x}} f(x, y) dy$ <p>3) В двойном интеграле <math>\iint_D f(x, y) dx dy</math> перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования. D:  <math>x^2 + y^2 \leq -2x, x \geq -1.5, y \geq 0</math>.</p> <p>4) С помощью двойного интеграла</p>

<p>площадь фигуры, ограниченной линиями:</p> $y = x^2 + 5, y = 5 - x, x = 2.$	<p>вычислить</p> <p>площадь фигуры, ограниченной линиями:</p> $y = x^2, x = 2 + y^2, y = 0, y = 4.$
---	---

## Вопросы к экзамену

### 1 семестр

1. Аксиомы Пеано натуральных чисел. Конечные множества. Основная теорема о конечных множествах.
2. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема Кантора о мощности множества подмножеств. Мощность континуума.
3. Аксиомы действительных чисел. Теоремы о точной верхней и точной нижней грани. Принцип Архимеда. Теорема о плотности рациональных и иррациональных чисел.
4. Теорема о мощности множества действительных чисел.
5. Лемма Гейне-Бореля-Лебега о покрытиях.
6. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей: единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, свойство устойчивости, предел модуля, предельный переход в неравенствах, свойство линейности.
7. Свойства сходящихся последовательностей: предельный переход в произведении и в частном.
8. Теоремы о пределе неубывающей и невозрастающей последовательности.
9. Число  $e$ .
10. Теорема Штольца.
11. Теорема о пределе промежуточной последовательности. Принцип Кантора о вложенных отрезках.
12. Принцип Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности.
13. Критерий Коши сходимости последовательности.
14. Определение предела числовой функции по Коши и по Гейне. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.
15. Критерий Коши существования предела функции.
16. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций: непрерывность модуля, локальная ограниченность, свойство устойчивости. Арифметические операции с непрерывными функциями. Непрерывность сложной и обратной функции.
17. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции). Вторая теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значении).
18. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема о существовании обратной функции.
19. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
20. Понятия производной, дифференцируемости, дифференциала функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Сравнение понятий производной и дифференцируемости.
21. Односторонние производные. Сравнение понятий непрерывности и дифференцируемости. Критерий дифференцируемости (в терминах непрерывности дифференциально-разностного отношения).
22. Дифференцирование линейной комбинации, произведения и частного двух функций.
23. Дифференцирование обратной и сложной функции. Инвариантность формы записи первого дифференциала.
24. Вывод производных элементарных функций.

25. Производные и дифференциалы высших порядков. Вычислительная формула для высших дифференциалов. Условие инвариантности высших дифференциалов относительно замены переменной.
26. Формулы Лейбница (высшее дифференцирование произведения и сложной функции).
27. Теорема Ферма об экстремуме функции. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.
28. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши.
29. Первое правило Лопиталя вычисления пределов
30. Второе правило Лопиталя вычисления пределов
31. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Единственность представления функции многочленом.
32. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Коши, Лагранжа. Пять основных разложений по формуле Тейлора.
33. Интерполяционный полином Лагранжа. Оценка погрешности интерполяции.
34. Критерий постоянства функции. Условие строгой монотонности функции на промежутке. Монотонность в точке.
35. Локальные экстремумы функции, их виды. Необходимое условие локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума в терминах 1-ой производной, 2-ой производной, n-той производной.
36. Выпуклые функции, виды выпуклости. Достаточное условие строгой выпуклости функции. Расположение графика выпуклой функции относительно касательной.
37. Неравенство Иенсена. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.
38. Неравенства Юнга, Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского.
39. Точки перегиба функции. Необходимое условие перегиба. Достаточное условие перегиба. Расположение графика функции относительно касательной в точке перегиба.
40. Понятие базы. Примеры баз. Предел числовой функции по базе. Свойства функций, имеющих предел по базе.
41. Критерий Коши существования предела по базе.
42. Счётно-порождённые базы. Предел Гейне по базе. Эквивалентность понятий предела по Гейне и по Коши в случае счётно-порождённых баз.

## **2 семестр**

43. Определение интеграла Римана. Интеграл Римана как предел по базе. Ограниченность интегрируемой функции.
44. Интегральные суммы Дарбу и их свойства: сравнение сумм Римана и Дарбу, суммы Дарбу как точные грани сумм Римана, поведение сумм Дарбу при измельчении разбиения, сравнение сумм Дарбу для любых разбиений.
45. Критерий интегрируемости Римана.
46. Интегрируемость непрерывной функции и функции с конечным числом точек разрыва.
47. Интегрируемость сложной функции. Арифметические операции с интегрируемыми функциями.
48. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Интегралы Дарбу как пределы сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции в терминах равенства её интегралов Дарбу.
49. Основные свойства определённого интеграла: интеграл от единицы, монотонность, линейность, аддитивность.
50. Первая теорема о среднем значении.
51. Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность интеграла по верхнему пределу. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу.
52. Вторая теорема о среднем значении.
53. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

54. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского и Минковского.
55. Определение несобственного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла.
- Признаки сходимости интегралов от неотрицательных функций.
56. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютно сходящиеся интегралы. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла.
57. Понятия метрического и нормированного пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве, их свойства. Связь между открытыми и замкнутыми множествами.
58. Предел по базе функции со значениями в метрическом пространстве. Свойства функций, имеющих предел. Предел последовательности. Предел функции в точке.
59. Полные метрические пространства. Принцип полноты Кантора. Подпространства полного пространства. Критерий Коши существования предела.
60. Предкомпактные множества в метрическом пространстве. Критерий предкомпактности Хаусдорфа.
61. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий компактности метрического пространства. Критерий компактности множества в полном метрическом пространстве. Компактные множества в  $\mathbf{R}$ .
62. Компактность в терминах покрытий. Компактность в терминах центрированных систем.
63. Непрерывные отображения метрических пространств. Прообраз открытого и замкнутого множества при непрерывном отображении. Непрерывность сложной функции.
64. Непрерывный образ компакта – компакт. Теоремы Вейерштрасса. Линейно связнымножества в метрическом пространстве. Непрерывный образ линейно-связного множества – линейно-связное множество.
65. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
66. Понятие топологического пространства. Окрестности, внутренние точки, предельные точки, точки прикосновения, замыкание, замкнутое множество, граница. Предел по базе функции со значениями в топологическом пространстве. Непрерывные отображения топологических пространств. Понятие гомеоморфизма.
67. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции. Критерий дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости функции.
68. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первогодифференциала. Правила дифференцирования.
69. Производная по направлению. Градиент.
70. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Непрерывно дифференцируемые функции.
71. Дифференциалы высших порядков. Вычислительная формула для дифференциаловвысших порядков. Условие инвариантности высших дифференциалов относительнозамены переменных.
72. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Формулаконечных приращений.
73. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
74. Неявная функция. Теорема о неявной функции.
75. Система неявных функций. Теорема о системе неявных функций. Существование обратной функции.
76. Условные экстремумы функций многих переменных. Метод множителей Лагранжа. Достаточное условие экстремума в методе Лагранжа.
77. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби.
78. Принцип сжимающих отображений.

### 3 семестр

79. Числовой ряд и его сумма. Критерий Коши и необходимое условие сходимости ряда. Общие свойства сходящихся рядов: сходимость ряда и его остатка, линейная операция с рядами, сочетательное свойство ряда.
80. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: общий критерий сходимости, признаки сравнения, Коши, Даламбера, Куммера и Раабе. Интегральный признак Коши-Маклорена. Сходимость ряда Римана.
81. Формула суммирования Эйлера. Постоянная Эйлера.
82. Признак Ермакова сходимости рядов с неотрицательными членами.
83. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле для произвольных числовых рядов. Оценка остатка ряда Лейбница.
84. Абсолютная и условная сходимость рядов. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах.
85. Умножение абсолютно сходящихся рядов. Умножение условно сходящихся рядов.
86. Бесконечные произведения и их связь с рядами. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения. Представление Эйлера для дзета-функции.
87. Равномерная и поточечная сходимость последовательности функций. Метрический критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций. Непрерывность предельной функции.
88. Признак Дини равномерной сходимости последовательности функций.
89. Предельный переход под знаком интеграла и производной для последовательности функций.
90. Равномерная и поточечная сходимость функционального ряда. Критерий Коши и необходимое условие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы ряда.
91. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
92. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.
93. Степенной ряд. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
94. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
95. Понятие аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Единственность представления аналитической функции степенным рядом.
96. Ряд Тейлора. Критерий представления функции степенным рядом. Достаточное условие аналитичности. Аналитичность основных элементарных функций. Пять основных разложений в степенные ряды.
97. Принцип единственности для аналитических функций. Понятие аналитической функции комплексного переменного. Комплексная экспонента и её свойства. Формулы Эйлера.
98. Аппроксимация непрерывных функций. Теорема Стоуна. Аппроксимация непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами.
99. Скалярное произведение функций. Абсолютно и квадратично интегрируемые функции, связь между ними. Неравенство Коши-Буняковского. Норма функции. Сходимость в среднем квадратичном. Аппроксимация ступенчатыми функциями (без доказательства). Тригонометрическая система функций и её свойства: ортогональность, полнота в равномерном и среднем квадратичном приближениях.
100. Необходимое условие разложения функции в равномерно сходящийся тригонометрический ряд. Понятие ряда Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Ряд Фурье в случае произвольного интервала.
101. Норма тригонометрического полинома. Выражение среднего квадратичного отклонения функции от тригонометрического полинома. Тождество Бесселя.



- Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Разложение функции в ряд Фурье, сходящийся в среднем квадратичном.
102. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутость тригонометрической системы функций. Однозначность определения функции своим рядом Фурье.
103. Теорема Римана о стремлении коэффициентов Фурье к нулю. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства.
104. Признак Дини сходимости ряда Фурье. Поточечная сходимость ряда Фурье кусочно-гладких функций.
105. Разложение синуса в бесконечное произведение.
106. Равномерная сходимость ряда Фурье непрерывных кусочно-гладких функций. Интегрирование рядов Фурье.
107. Семейства функций, зависящих от параметров. Поточечная и равномерная сходимость. Достаточное условие равномерной сходимости. Метрический критерий равномерной сходимости. Равномерная сходимость семейства функций на языке последовательностей. Непрерывность предельной функции.
108. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с постоянными пределами интегрирования. Предельный переход по параметру под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметрам. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру в случае постоянных пределов интегрирования.
109. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с переменными пределами интегрирования. Непрерывность интеграла по параметрам. Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.
110. Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла.
111. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров.
112. Непрерывность несобственного интеграла по параметрам. Дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла по параметру.
113. Гамма-функция и бета-функция. Множества сходимости эйлеровых интегралов. Равномерная сходимость. Разложение гамма-функции в бесконечное произведение.
114. Свойства гамма-функции: формула понижения, аналитическое продолжение гамма-функции в комплексную плоскость, формула дополнения.
115. Свойства гамма-функции: формула удвоения Лежандра, формула умножения Гаусса (без доказательства). Связь между эйлеровыми интегралами.
116. Формула Стирлинга.
117. Понятие интеграла Фурье. Интегральная формула Фурье. Комплексная запись интеграла Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье. Формулы обращения.
118. Свойства преобразования Фурье: линейность, ограниченность, непрерывность. Преобразование Фурье производной. Связь между гладкостью функции и скоростью убывания её преобразования Фурье. Производная преобразования Фурье.
119. Преобразование Фурье бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Формула Планшереля. Преобразование Фурье свёртки функций.
120. Понятие асимптотической последовательности и асимптотического разложения. Единственность асимптотического разложения. Операции со степенными асимптотическими рядами: арифметические операции, почленное интегрирование и дифференцирование.
121. Формула суммирования Эйлера-Маклорена.
122. Лемма Ватсона.

#### **4 семестр**

123. Внутренняя и внешняя мера Жордана и их свойства.
124. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства измеримых множеств.

125. Свойства меры Жордана: конечная аддитивность, мера прямого произведения множеств. Мера графика непрерывной на компакте функции.
126. Определение кратного интеграла Римана. Интегральные суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.
127. Интегрируемость непрерывных функций. Связь между интегрируемостью и ограниченностью.
128. Интегрируемость разрывных функций.
129. Четыре основных свойства интеграла. Интегральная теорема о среднем.
130. Сведение двойного интеграла к повторному.
131. Сведение кратного интеграла к повторному.
132. Замена переменных в двойном интеграле.
133. Определение несобственного кратного интеграла. Несобственные интегралы от неотрицательной функции.
- Несобственный кратный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он абсолютно сходится.
135. Длина кривой. Аддитивность длины. Вычислительная формула для длины непрерывно дифференцируемой кривой.
136. Криволинейные интегралы первого рода и их свойства. Вычислительная формула.
137. Криволинейные интегралы второго рода и их свойства. Вычислительная формула.
138. Формула Грина.
139. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Критерий полного дифференциала в односвязной области.
140. Первая квадратичная форма поверхности. Площадь поверхности.
141. Ориентация поверхности и её края. Кусочно-гладкие поверхности.
142. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Вычислительные формулы.
143. Формула Стокса.
144. Векторная трактовка формулы Стокса. Геометрическое определение ротора векторного поля.
145. Формула Гаусса-Остроградского, её векторная трактовка. Геометрическое определение дивергенции векторного поля.
146. Полилинейные антисимметричные формы. Внешнее произведение форм и его свойства.
147. Дифференциальные формы. Операции внешнего дифференцирования и переноса форм, их свойства.
148. Понятие многообразия. Ориентация многообразия и его края. Интегрирование дифференциальных форм на многообразии. Общая формула Стокса (без доказательства).