

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Дифференциальные уравнения в прикладных задачах  
естествознания**

Направление подготовки

01.03.01-«Математика»

Направленность

*Математика*

Квалификация выпускника

*Бакалавр*

Форма обучения

*Очная*

Фонд оценочных средств

разработан Албогачиевой М.М., доцент кафедры «Математический анализ»

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры  
«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024 г. № 9  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Танкиев И.А.

г. Магас 2024

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета**

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

**Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена**

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных

	заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

## 6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

- 1.самоконтроль и самооценка обучающегося;
- 2.контроль и оценка со стороны преподавателя.

### Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

### Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности

обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимые для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

### **6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов**

#### **Вопросов к экзамену:**

1. Особенности систем и задач естествознания и как объектов математического моделирования.
2. Кинетические уравнения в химии
3. Уравнения материального баланса в химии
4. Экстремум.
5. Дифференциальное уравнение экспоненциального роста.
6. Уравнение Лапласа.
7. Уравнение Пуассона.
8. Уравнение Неймана.
9. Частично изолированные популяции
10. Модель Оттесена.
11. Устойчивость систем дифференциальных уравнений.
12. Дифференциальные уравнения в экологии
13. Модель "хищник - жертва"
14. Модели биологической динамики на основе точечных отображений
15. Диаграмма Ламеррея
16. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений
17. Дифференциальные уравнения в частных производных
18. Модели морфогенеза
19. Рост колоний микробов
20. Рост ареала популяции
21. Рост раковой опухоли
22. Устойчивое развитие биологических систем.

23. Периодические процессы
24. Биологические часы
25. Модели сердца
26. Стохастический резонанс в биологии
27. Модели гидродинамики
28. Движение рыб
29. Динамика крови
30. Нелинейные волны

### Примерные задания для контрольных работ

#### Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения  $2(y + y') = x + 2$ .
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными
  1.  $(x^3 + 2x)y^2 dy = x dx$ ;    2.  $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$ ;    3.  $\frac{y'}{y} = x \cos^2 y$ ;
  4.  $y' x^2 e^y = e^{-y}$ ,  $y(1) = 0$ ;    5.  $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$ ,  $y(0) = 2$ .
3. Решить однородные уравнения
  1.  $x^2 y' - y^2 = 2x^2$ ;    2.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ ;    3.  $xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-y/x} dx$ ;
  4.  $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$ ;    5.  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
  1.  $y' + 2xy = x e^{-x^2}$ ;    2.  $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ ;    3.  $xy' = y + x^2 \cos x$ ;
  4.  $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ ,  $y(2) = 1,5$ ;    5.  $y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x$ ,  $y(0) = 1$ .
5. Решить уравнение Бернулли
  1.  $y' = x^3 y^3 - xy$ ;    2.  $xy + 2y = x^5 y$ ;    3.  $2(xy' + y) = y^2 \ln x$ ,  $y(1) = 2$ .
6. Решить уравнение в полных дифференциалах
  1.  $(y + \frac{2}{x^2})dx + (x + \frac{3}{y^2})dy = 0$ ;    2.  $\frac{3x^2 + y}{y^2} dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3} dy$ .

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

1.  $xy' - xe^{x/y} = 2$ ; 2.  $xydx + (x+1)dy = 0$ ; 3.  $xy' + 3xy^3 = 2y$ ;

4.  $dy + (3y - e^{3x})dx = 0$ ; 5.  $(x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0$ .

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

1.  $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0$ ; 2.  $xy' + y = y^2$ ; 3.  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ ;

4.  $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ ; 5.  $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + y^2y)dy = 0$ .

10. Решить задачу Коши

1.  $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ ; 2.  $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$ ,  $y(0) = 1$ ;

3.  $ydx = (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy$ ,  $y(16) = \pi$ .

11. Решить уравнения

1.  $y = x + y' - \ln y'$ ; 2.  $x[(y')^2 - 1] = 2y'$ ; 3.  $y = xy' - (y')^2$ .

### Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решить уравнения, понизив их порядок

1.  $y'' + 2xy' = 0$ ; 2.  $(y-1)y'' = 2(y')^2$ ;

3.  $y''' + 3y'y'' = 0$ ; 4.  $yy'' = 2x(y')^2$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y'(2) = 0,5$ .

1. Найти общее решение уравнения

1.  $y'' - 2y' + 4y = 0$ ; 2.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ; 3.  $y'' + 4y = 0$ .

2. Решить задачу Коши

1.  $3y'' - 2y' - 8y = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ ; 2.  $y'' + y = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ ,  $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$ .

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

1.  $f(x) = 3x^2 - 1$ ; 2.  $f(x) = 3e^{-x}$ ; 3.  $f(x) = 2\sin x$ ; 4.  $f(x) = e^x \cos 2x$ .

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\frac{x}{2}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

1.  $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$ ; 2.  $y^{(4)} - y''' = 5(x + 2)^3$ ;

3.  $(4x + 3)^2 y'' + (4x + 3)y' - 16y = 0$ ; 4.  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$ .

## Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

1)  $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$  . 2)  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$  ,  $x(0) = 0$   
 $y(0) = 1$ .

3)  $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$  . 4)  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}$  .

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \frac{1}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , где

1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 5$ ; 2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - y'' + y' + x - 3y = 0,$$

$$4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0.$$

## Образцы контрольных заданий

### Контрольная работа по теме

### «Дифференциальные уравнения первого порядка»

#### Вариант № 1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1.  $(y + y \ln x)dx - (x - xy)dy = 0$ .



$$2. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

$$3. \quad (xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$$

## II. Найти частные решения

$$1. \quad xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 1.$$

$$2. \quad e^y dx = (2y - xe^y) dy, \quad y(-1) = 0.$$

### Контрольная работа по теме

### «Дифференциальные уравнения высших порядков»

#### Вариант №1

#### I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

$$1. \quad y'' = y' + x.$$

$$2. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

#### II. Решить задачу Коши:

$$1. \quad yy'' + (y')^2 = 0. \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

$$2. \quad y'' - y' = e^{-x} + 2x. \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

#### Задания для построения моделей:

1. Экспоненциальный рост популяции (решение уравнения, график временной зависимости для численности)
2. Логистический рост (решение уравнения, график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
3. Модель популяции с наименьшей критической численностью (график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
4. Дискретное логистическое уравнение. Лестница Ламерея (построение временной зависимости для численности по графику зависимости, анализ устойчивости положения равновесия)

5. Система линейных химических реакций (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
6. Модель Лотки (модель химической реакции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
7. Классическая модель Вольтерра «хищник-жертва» (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
8. Модель отбора одного из равноправных (общая модель для двух видов и модель, учитывающая ограниченность в питательных ресурсах и быстрое их поглощение по сравнению с процессами репродукции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
9. Модель конкуренции (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
10. Модель «хищник-жертва» (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
11. Модель биохимической регуляции белкового синтеза (генетический триггер Жакоба и Моно) (для  $m = 0$  определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
12. Брюсселятор (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)
13. Модель гликолиза (упрощенная схема) (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)

### **Примерная тематика курсовых работ**

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда

6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
  7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций.
- Применение численных методов.