

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ**

Направление подготовки
01.03.01- «Математика»

Направленность
Математика

квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Фонд оценочных средств

разработан Оздоева Е.В., ст. преподаватель.
(подпись) Ф.И.О., должность, ученая степень, ученое звание
Рекомендован к утверждению на заседании кафедры
«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024г. №9
Зав. кафедрой _____ Танкиев И.А.
(попись)

г. МАГАС, 2024

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Результаты освоения дисциплины (модуля) «Теория операторов»		
Код и наименование компетенции	Индикаторы	Дескрипторы
Универсальные компетенции (УК)		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.	Знает основные принципы самовоспитания и самообразования, профессионального и личностного развития, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда. Умеет планировать свое рабочее время и время для саморазвития. формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, индивидуально-личностных особенностей. Владеет практическим опытом получения дополнительного образования, изучения дополнительных образовательных программ.

Профессиональные компетенции (ПК)

ПК-1 Способен строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-1.1. Знает утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа ; ПК-1.2. Умеет пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа; ПК-1.3. Владеет методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода.	Знать: утверждения, находящиеся в широком диапазоне, требующие оригинальности анализа Уметь: пользоваться отработанными и малоизвестными методами анализа Владеть: методиками доказательств, требующими абстрактного мышления и комплексного подхода
---	---	---

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся

		недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Оценивание ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворите	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы

льно»	не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

1. Определение метрического пространства.
2. Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры метрических пространств.
3. Сходимость. Непрерывность метрики. Открытые замкнутые множества и их свойства.
4. Сепарабельные пространства. Примеры.
5. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
6. Теорема Бэра.
7. Принцип сжимающих отображений.
8. Приложение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.
9. Приложение принципа сжимающих отображений к задаче Коши.
10. Компактность в метрических пространствах. Теоремы о непрерывных функциях на компактных множествах.
11. Критерий компактности Хаусдорфа.
12. Критерий Арцела относительной компактности множеств в пространстве непрерывных функций.
13. Теорема Пеано.
14. Линейные нормированные пространства. Непрерывность алгебраических операций и нормы. Примеры ЛНП. Ряды в банаховых

пространствах.

15. Предгильбертовы пространства. Теорема о норме.
16. Свойства скалярного произведения. Ортогональность. Процесс ортогонализации.
17. Ортонормированный базис. Теорема о существовании.
18. Теорема Рисса – Фишера о разложении по ортонормированному базису.
19. Теорема об ортогональном разложении.
20. Примеры ортонормированных базисов.
21. Теорема об изоморфизме гильбертовых пространств.
22. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Теорема о ее вычислении.
23. Примеры операторов: интегральные операторы, оператор ортогонального проектирования, линейные функционалы.
24. Теорема о продолжении оператора по непрерывности.
25. Действия над линейными операторами. Теорема о полноте пространства операторов.
26. Равномерная и поточечная сходимости последовательностей операторов.
27. Принцип равномерной ограниченности.
28. Критерий поточечной сходимости.
29. Обратимые операторы. Общий критерий обратимости.
30. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному.
31. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.
32. Приложение теорем об обратимости к интегральным уравнениям.
33. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора. Теорема о резольvente и резольвентном множестве.
34. Примеры исследования спектров операторов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету в 7 семестре

1. Общая конструкция построения меры.
2. Мера Лебега на прямой.
3. Мера Лебега и мера Жордана.
4. Примеры множеств измеримых по Лебегу.
5. Свойства меры Лебега и множеств измеримых по Лебегу.
6. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств.
7. Понятие почти всюду (п.в.). Эквивалентные функции. Существенно ограниченные функции.
8. Понятие измеримой функции. Примеры.
9. Свойства измеримых функций.
10. Измеримость непрерывных функций.
11. Теорема Лузина. Пример.
12. Интегральные суммы Лебега и Римана.
13. Интеграл Лебега для ограниченных функций. Нижняя и верхняя суммы Лебега.
14. Критерий существования интеграла Лебега.
15. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Степенные функции.
16. Интеграл Лебега для неотрицательных функций. Вертикальные срезы.
17. Интеграл Лебега для произвольных функций. Абсолютная интегрируемость.
18. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (линейность по функции, аддитивность по множеству интегрирования).
19. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (равенство нулю и положительность).
20. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (неравенства).
21. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (абсолютная суммируемость).

22. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (достаточный признак суммируемости).
23. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега. Примеры.
24. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Свойства.
25. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление функции по производной, канторовы функции.
26. Пространства конечномерных векторов и пространства функций L_p .
27. Пространства L_p . Тожественность эквивалентных функций. Примеры.
28. Линейная структура и бесконечномерность пространства L_p . Степенная система. Тригонометрическая система.
29. Норма и метрическая структура в пространствах L_p .
30. Неравенства Гёльдера и Минковского.
31. Соотношения между пространствами L_p .
32. Сходимость в пространствах L_p . Примеры.
33. Свойства пределов и сходящихся последовательностей в L_p : единственность предела.
34. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : непрерывность линейных операций, нормы и расстояния.
35. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : ограниченность и сходимость.
36. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p : поточечная сходимость и сходимость в L_p .
37. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в L_p , сходимость при разных p .
38. Полнота пространств L_p . Фундаментальные последовательности. Свойства (линейные операции, ограниченность).
39. Полнота пространств L_p . Фундаментальные последовательности.

Свойства (сходимость).

40. Полнота пространств L_p . Теорема Фишера.

41. Полнота пространств L_p . Сжимающиеся последовательности.

42. Ряды в пространствах L_p (сходимость, свойства, необходимый признак, признак Вейерштрасса).

43. Тригонометрические ряды в пространстве L $(-\pi, \pi)$. Применение признака Вейерштрасса, теорема Рисса.

44. Плотность множеств в пространствах L_p . Основные понятия. Множество непрерывных функций в пространствах L_p . Полные системы функций и базисы.

45. Плотность множеств в пространствах L_p . Множество алгебраических многочленов и множество тригонометрических многочленов. Система многочленов Лежандра. Тригонометрическая система.

46. Пространство L_2 $(-\pi, \pi)$. Скалярное произведение и норма. Неравенство Коши.

47. Пространство L_2 $(-\pi, \pi)$. Ортогональность. Примеры. Проекция на конечную систему функций. Свойства. Тригонометрическая система. Ортогональность. Проекция на тригонометрическую систему.

48. Тригонометрический ряд Фурье для функции из L_2 $(-\pi, \pi)$. Коэффициенты Фурье. Экстремальность частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.

49. Тригонометрический базис в L_2 $(-\pi, \pi)$ и L_2 (a, b) . Разложение только по синусам или только по косинусам. Теорема Рисса-Фишера.

Вопросы к экзамену в 8 семестре

1. Линейные пространства. Основные понятия: линейная независимость, размерность, изоморфизм.

2. Метрические пространства. Основные понятия: геометрия, топология, сходимость, изоморфизм.

3. Согласованность линейной и метрической структур в произвольном пространстве.
4. Нормированные пространства. Метрика. Согласованность линейной и метрической структур в нормированном пространстве.
5. Сходимость в нормированных пространствах. Свойства.
6. Основные примеры нормированных пространств.
7. Полные нормированные пространства. Основные понятия.
Конечномерные пространства. Примеры.
8. Итерационные последовательности в полных нормированных пространствах.
9. Теоремы о пополнении и полном нормированном пространстве.
10. Ряды в нормированных пространствах. Признак Вейерштрасса.
11. Плотность множеств в нормированных пространствах. Сепарабельные пространства.
12. Полные линейные независимые системы. Базисы. Степенная система.
Тригонометрическая система.
13. Компактность и предкомпактность в нормированных и банаховых пространствах. Примеры.
14. Непрерывные отображения. Теорема Вейерштрасса. Существование наилучшего приближения.
15. Полная ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Теорема Риса.
16. Предкомпактность в конкретных бесконечномерных пространствах.
17. Евклидовы пространства. Нормируемость. Неравенства Коши. Свойства скалярного произведения.
18. Ортогональность в евклидовых пространствах. Ортогонализация линейно независимой системы в евклидовом пространстве. Полиномы Лежандра.
19. Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Коэффициенты Фурье.
Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

20. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье к данному элементу.
21. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
22. Теорема Рисса-Фишера в гильбертовом пространстве.
23. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
24. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Следствия.
25. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.
26. Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма.
27. Линейные операторы в конечномерных пространствах.
28. Интегральный оператор
29. Пространство линейных ограниченных операторов. Ряды операторов.
30. Сопряжённое пространство. Его представление. Примеры.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
32. Продолжение линейных ограниченных операторов. Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
33. Обратный оператор. Непрерывная обратимость. Её условия. Теорема Банаха об обратном операторе.
34. Обратный оператор. Обратимость оператора близкого к единичному. Обратимость оператора близкого к обратимому.
35. Спектр и резольвента, их свойства. Примеры.
36. Компактные операторы. Конечномерные операторы. Единичный оператор в бесконечномерном пространстве. Обратимость компактного оператора.
37. Замкнутость множества компактных операторов в множестве ограниченных операторов.
38. Интегральный оператор.

- 39.Спектр компактного оператора. Нулевая точка. Собственные числа и собственные вектора.
- 40.Теорема Фредгольма. Пример оператора. Заданного диагональной матрицей.
- 41.Сопряжённые операторы. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Самосопряжённые операторы. Проекторы. Свойства. Примеры.
- 42.Спектр самосопряжённого оператора. Примеры.
- 43.Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема ГильбертаШмидта.
- 44.Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
- 45.Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтера.
- 46.Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Разложение в ряд. Уравнения с симметричным ядром. Уравнения с вырожденным ядром.
- 47.Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.
- 48.Нелинейные операторы. Примеры. Непрерывность и условия Липшица.
- 49.Сжимающие операторы. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений. Принцип сжимающих операторов.
- 50.Сжимающие операторы. Следствия и применения принципа сжимающих операторов (интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода).
- 51.Неподвижные точки произвольных операторов. Теорема Брауэра. Теорема Шаудера.
- 52.Дифференцируемые операторы. Производная Фреше. Примеры, свойства (формула конечных приращений, условия сжатия).
- 53.Дифференцируемые операторы. Теорема о локальном обращении дифференцируемого оператора (приближённый обратный оператор). Итерационный метод Ньютона