

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Математический анализ»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ
МАТЕМАТИКИ**

Направление подготовки

01.03.01- «Математика»

Направленность

Математика

квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Фонд оценочных средств
разработан ст.препод. кафедры «Математический анализ» Аушевой М.А.

Рекомендован к утверждению на заседании кафедры
«Математический анализ» протокол заседания от 17 мая 2024 г. № 9
Зав. кафедрой _____ Танкиев И.А.

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица 1.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	ПК-2.1: Знает способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирования задач различных групп. ПК-2.2: Выбирает наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике. ПК-2.3: Обладает систематизированными теоретическими и практическим знаниями.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-	91-100	81-90	61-80	0-60

балльная шкала				
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно

		свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	<ul style="list-style-type: none"> - Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи. 	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы

Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

Оценивание ответа на зачете

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их

	выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
--	---

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов Задания для исследовательских домашних работ

1. Замечательные числа

Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 – это первое замечательное число. Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

Класс: ≥ 1 , ≤ 6

Раздел: арифметика

2. Прямоугольники с заданной площадью

На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Для каких – два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

Класс: ≥ 3 (площадь, периметр), ≤ 5 (простые и составные числа)

Раздел: арифметика, геометрия

3. Разложение числа

Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

Класс: ≥ 5 (делители)

Раздел: арифметика

4. Суперкомпьютер

Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию- операцию смешивания двух чисел: из чисел m, n компьютер получает число $(m+n) / 2$. Если $m+n$ – нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа,

одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на суперкомпьютере можно получить единицу?

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

5. Диагонали прямоугольников

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199×991 клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника – размером $M \times N$ клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

6. Задача о размене

Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax+by$, где a и b – данные натуральные числа, x и y – произвольные целые неотрицательные числа.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

7. Складные квадраты

Складные числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$$5^2=2\underline{5}; \quad 6^2=3\underline{6}; \quad 25^2 = \underline{625}.$$

«Пятью **пять** – двадцать **пять**», «шестью **шесть** – тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.

Класс: ≥ 7

Раздел: арифметика, алгебра

8. Поиск чисел с заданным количеством делителей

Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, – это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа N опишите все натуральные числа, имеющие ровно N делителей.

Класс: >=7 (основная теорема арифметики)

Раздел: арифметика

9. Разложения дробей

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \frac{2}{7} = 0,(285714), \frac{3}{7} = 0,(428571), \dots$$

Для числа $1/7$ разложение в десятичную дробь периодически и состоит из шести цифр, а для $2/7, 3/7, \dots, 6/7$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для числа $1/13$ и $2/13$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $1/p, 2/p, \dots, (p-1)/p$, для $p = 17, 19, 41, 47$ и другим простым числам, и разберитесь, какие бывают циклы.

Класс: >=8

Раздел: арифметика

10. Периодические последовательности

Найдите периоды последовательностей:

1) $a_n \equiv n^m \pmod{k}$,

2) $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$, где φ_n — числа Фибоначчи.

Класс: >=9 (арифметики остатков, бином Ньютона)

Раздел: арифметика

11. Классификация графиков дробно-квадратичных функций

Рассмотрим функцию $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$, где в числителе и в знаменателе — многочлены степени не выше второй. Какие типы графиков могут получиться (исследуйте количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т.д.)?

Класс: >=8 (дробно-квадратичные функции)

Раздел: алгебра

12. Симметрические многочлены

Симметрические многочлены — это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются. Например: $x^2 + y^2$, $x + y - xy$. Многочлены $u = x + y$ и $v = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами.

Верно ли, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных u и v ? Как это сделать быстро?

Обобщение. Поставьте и решите аналогичную задачу для симметрического многочлена от трёх переменных (сколько есть элементарных симметрических многочленов от x, y, z ?).

Класс: ≥ 8 (математическая индукция, бином Ньютона)

Раздел: алгебра

13. Многочлен с заданным нулём

Постройте многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ноль $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Постройте многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством.

Обобщение. Та же задача для суммы k квадратных корней из различных простых чисел.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, иррациональности)

Раздел: алгебра

14. Иррациональные корни

При каких целых a, b, c корни уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ записываются только через квадратичные иррациональности? (Допускается несколько знаков квадратного корня – один в другом.)

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, замена переменных)

Раздел: алгебра

15. Количество решений

1. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ в зависимости от параметров p и q . Нарисуйте на плоскости параметров (p, q) области, соответствующие случаю 4, 3, 2 и т.д. корней.
2. Аналогичная задача для кубического многочлена $x^3 + px + q = 0$.
3. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ в зависимости от параметров a, b и c . Изобразите соответствующие области в пространстве параметров (a, b, c) .

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, теорема Безу)

Раздел: алгебра

16. Как увидеть симметрию многочлена?

Уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=1$ легко решается с помощью замены неизвестной. Для этого достаточно перемножить крайние скобки, перемножить средние скобки: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 1$ и сделать замену $t = x^2 + 3x$. Однако, если сразу раскрыть все скобки, то непонятно, как решать полученное уравнение (как увидеть нужную замену):

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Требуется исследовать, какая особенность левой части уравнения позволяет сделать нужную замену, какой класс уравнений можно решать подобным способом, как

определять для многочлена стандартного вида, можно ли найти его корни соответствующей квадратичной заменой.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, замена переменной)

Раздел: алгебра

17. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k; b)$

Рассмотрим координатную плоскость $(k; b)$. Каждая прямая вида $y=kx+b$ изображается на этой плоскости в виде **точки**. На координатной плоскости $(k; b)$ проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x; y)$. Как эти семейства прямых связаны между собой? Аналогичный вопрос для трех параллельных прямых.

Класс: ≥ 7 (линейная функция)

Раздел: алгебра

18. Диофантово уравнение А.А. Маркова

Решить уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, теорема Виета)

Раздел: алгебра, арифметика

19. Периодическая последовательность

Последовательность $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$ ($a_0 = 0, a_1 = 1$) является периодической (проверьте).

При каких числах k и l последовательность $a_{n+2} = ka_n + la_{n+1}$ получается периодической? Какой длины может быть период?

Класс: ≥ 9

Раздел: алгебра

Контрольная работа № 1

Вариант № 1.

1. На доске нарисован многоугольник. Отметили середины его сторон, а сам многоугольник стёрли. Как восстановить многоугольник по серединам сторон? Сколько решений имеет задача?
2. На сколько частей можно разбить плоскость n прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?

Вариант № 2.

1. Назовём многоугольник *равноугольным*, если у него все углы равны. Например, равноугольный четырёхугольник — это прямоугольник. У него равны

противоположные стороны, диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам и т.д. А какие свойства есть у равноугольного *шестиугольника*?

2. На клетчатой бумаге обведён прямоугольник размером 3×4 клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размерами $n \times m$.

Контрольная работа № 2

Вариант № 1.

1. Имеется несколько настоящих монет – все одного веса, и одна фальшивая – она легче. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах понадобится, чтобы определить фальшивую монету? Как надо взвешивать? Сначала решите задачу для 3, 9, 27 монет. Та же задача, если фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но неизвестно, в какую сторону.

2. В игре Ним играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в Ним.

Вариант 2.

1. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?
2. Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Изучить эволюцию узоров.

Вопросы к зачету:

1. Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.
2. Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.
3. Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.
4. Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.
5. Методы решения уравнений и неравенств с модулями.
6. Методы решения задач, содержащих параметры.

7. Методы решения геометрических задач повышенной сложности.
8. Методы решения исследовательских задач теории чисел.
9. Методы решения исследовательских задач алгебры.
10. Методы решения олимпиадных задач.
11. Организация поисково-исследовательской деятельности учащихся
12. Сравнительная характеристика систем традиционного и развивающего обучения
13. Характеристика проблемного обучения
14. Основные этапы учебного исследования
15. Виды самостоятельных исследовательских работ учащихся
16. Основные этапы научного исследования
17. Технологии проведения исследовательской работы
18. Методика подбора исследовательских задач в 5-7кл.
19. Методика подбора исследовательских задач в 8-9кл.
20. Методика подбора исследовательских задач в 10-11кл.