

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

Батыгов З.О.

«25» 05 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Научные основы школьного курса математики и информатики

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Программа академического бакалавриата

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Факультет: физико-математический

Кафедра: математического анализа

МАГАС 2018 г.

Составители рабочей программы

Доцент кафедры мат.анализа, к.ф-м.н.

(должность, уч.степень, звание)

  
(подпись)

Кодзоева Ф.Дж.

(Ф. И. О.)

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры мат.анализа

Протокол заседания № 8 от « 24 » 04 2018 г.

Заведующий кафедрой

  
(подпись)

/Танкиев И.А./

(Ф. И. О.)

Рабочая программа одобрена учебно-методическим советом физико-математического факультета.

Протокол заседания № 9 от « 30 » 04 2018 г.

Председатель учебно-методического совета

  
(подпись)

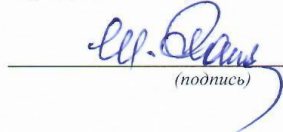
/Танкиев И.А./

(Ф. И. О.)

Рабочая программа рассмотрена учебно-методическим советом Ингушского Государственного Университета.

Протокол заседания № 9 от « 04 » 05 2018 г.

Председатель учебно-методического совета ИнгГУ

  
(подпись)

/Хашагульгов Ш.Б./

(Ф. И. О.)

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Научные основы школьного курса математики» являются:

- обзор понятий и методов элементарной математики с точки зрения высшей математики;
- привитие студентам методов методологического анализа изученной в школе и в вузе математики.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина Б1.В.ОД.13 завершает математическое образование бакалавра и проводит связь между школьными и вузовскими подходами в арифметике, алгебре, анализе и геометрии. Является предшествующей для изучения курсов «Исследовательские задачи в школьной математике», «Теория и методика обучения математике».

**Таблица 2.1.**

**Связь дисциплины «Научные основы школьного курса математики» с предшествующими дисциплинами и сроки их изучения**

Код дисциплины	Дисциплины, предшествующие дисциплине «Научные основы школьного курса математики»	Семестр
	Школьный курс математики	

**Таблица 2.2.**

**Связь дисциплины «Научные основы школьного курса математики» с последующими дисциплинами и сроки их изучения**

Код дисциплины	Дисциплины, следующие за дисциплиной «Научные основы школьного курса математики»	Семестр
Б1.В.ОД.14	Исследовательские задачи в школьном курсе математики	6

**Таблица 2.3.**

**Связь дисциплины «Научные основы школьного курса математики» со смежными дисциплинами**

Код дисциплины	Дисциплины, смежные с дисциплиной «Научные основы школьного курса математики»	Семестр
Б1.В.ОД.11	Методика преподавания математики и информатики	5

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ.

Таблица 3.1

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Перечень компетенций, которыми должны овладеть обучающиеся в результате освоения образовательной программы	Степень реализации компетенции и при изучении дисциплины (модуля)	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)		
		Знания	Умения	Владения (навыки)
<b>Профессиональные компетенции</b>				
ПК-1	Реализуется полностью	Различные методы решения математических исследовательских задач и задач повышенной трудности, учитывающих учебные программы для профильных школ и средних специальных учебных заведений	пользоваться литературой по методике решения исследовательских задач и задач повышенной сложности	основными методами обучения учащихся решению и задач повышенной сложности, способами ориентации в профессиональных источниках информации

ПК-9	Реализуется полностью	Различные методы решения математических исследовательских задач и задач повышенной трудности, учитывающих учебные программы для профильных школ и средних специальных учебных заведений	определять класс задач и учить школьников соответствующим методам ее решения.	способами взаимодействия с другими субъектами образовательного процесса; различными средствами коммуникации в профессиональной педагогической деятельности
ПК-10	Реализуется полностью	Различные методы решения математических исследовательских задач и задач повышенной трудности, учитывающих учебные программы для профильных школ и средних специальных учебных заведений	пользоваться литературой по методике решения исследовательских задач и задач повышенной сложности	способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды образовательного учреждения, региона, области, страны

Таблица 3.2.

**Планируемые результаты обучения по уровням сформированности компетенций**

<b>Код компетенции</b>	<b>Уровень проявления</b>	<b>Описание признаков проявления компетенции на разных уровнях</b>

ПК-1	Высокий уровень компетентности	<p><b>Знает</b> особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики.</p> <p><b>Умеет</b> системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы</p> <p><b>Владеет</b> современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры данной дисциплины и взаимосвязи между подчиненными ей дисциплинами.</p>
	Базовый уровень компетентности	<p><b>Знает</b> основные обстоятельства и условия зарождения и становления математики, цели и задачи, объект и предмет науки</p> <p><b>Умеет</b> проиллюстрировать имеющиеся закономерности, связи и компоненты изучаемого явления</p> <p><b>Владеет</b> концептуальной основой для осмысления роли математики в жизни общества, способами определения роли научных школ и направлений с целью систематизации достижений научной мысли</p>
	Минимальный уровень компетентности	<p><b>Знает</b> основные сведения о вкладе отечественных ученых в развитие математики. Знает цели и задачи, объект и предмет наук</p> <p><b>Умеет</b> ориентироваться в профессиональных источниках информации (журналы, сайты, образовательные порталы и т.д.)</p>

		<b>Владеет</b> методами анализа и синтеза информации, оценки значимости изучаемого вопроса
ПК-9	Высокий уровень компетентности	<p><b>Знает</b> задачи учебных курсов на всех уровнях образования, основные нормативные документы</p> <p><b>Умеет</b> строить основные учебные стратегии (умения учиться), приемы самостоятельной работы с учебным материалом, типологию заданий, направленных на проверку и закрепление пройденного материала</p> <p><b>Владеет</b> способностью эффективно строить учебный процесс на всех уровнях и этапах образования в области математики и информатики</p>
	Базовый уровень компетентности	<p><b>Знает</b> основные принципы построения школьных программ и учебников</p> <p><b>Умеет</b> эффективно строить учебный процесс в соответствии с задачами конкретного учебного курса и условиями обучения</p> <p><b>Владеет</b> способностью эффективно строить учебный процесс на всех уровнях и этапах образования в области математики и информатики</p>
	Минимальный уровень компетентности	<b>Знает</b> способы психологического и педагогического изучения

		<p>обучающихся</p> <p><b>Умеет</b> составлять контролирующие задания в соответствии с требованиями стандарта</p> <p><b>Владеет</b> методиками обучения в зависимости от степени образования</p>
ПК-10	Высокий уровень компетентности	<p><b>Знает</b> теоретические основы создания и использования новых педагогических технологий и методических систем обучения, реализованных на базе информационных и коммуникационных технологий, обеспечивающих развитие учащихся на разных ступенях образования.</p> <p><b>Умеет</b> разрабатывать научно-методическое обеспечение реализации курируемых учебных предметов, курсов, дисциплин.</p> <p><b>Владеет</b> систематизированными теоретическими и практическими знаниями для определения и решения задач в области образования</p>
	Базовый уровень компетентности	<p><b>Знает</b> сравнительные исследования теории и методики математического образования в различных педагогических системах</p> <p><b>Умеет</b> осуществлять отбор учебного материала с учетом специфики направления подготовки, проявлять инициативу и самостоятельность в педагогической деятельности</p> <p><b>Владеет</b> методикой передачи информации в связных, логичных и аргументированных высказываниях, технологиями диагностирования достижений учащихся для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса</p>



	Минимальный уровень компетентности	<p><b>Знает</b> нормативно-правовые основы преподавательской деятельности в системе высшего образования, содержание программ преподаваемых дисциплин</p> <p><b>Умеет</b> грамотно и аргументированно выражать свою точку зрения, вести дискуссию по проблемам профессиональной деятельности, использовать оптимальные методы преподавания</p> <p><b>Владет</b> навыками публичной речи, методами и технологиями образовательной деятельности</p>
--	------------------------------------	--

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Таблица 4.1.

Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	5 семестр
Общая трудоемкость дисциплины	72	72
Аудиторные занятия	38	38
Лекции	20	20
Практические занятия (ПЗ)	18	18
Контроль самостоятельной работы (КСР)	2	2
Самостоятельная работа	32	32
Вид итогового контроля		зачет

#### **4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ, СТРУКТУРИРОВАННОЕ ПО ТЕМАМ (РАЗДЕЛАМ) С УКАЗАНИЕМ ОТВЕДЕННОГО НА НИХ КОЛИЧЕСТВА АКАДЕМИЧЕСКИХ ИЛИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ЧАСОВ И ВИДОВ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ**

Раздел 1. **Основные этапы развития математики**

Раздел 2. **Теоретико-множественная и логическая база математики.**

Аксиоматический метод в построении математических структур, их моделирование. Основные математические структуры, возникающие в школьном курсе (эквивалентность, порядок, алгебраические, геометрические, топологические).

Аксиоматика абстрактного множества. Теоретико-множественный язык и основные факты из теории множеств. Основные множества, возникающие в школьной математике (числовые, точечные, функциональные), уровень их изучения и проблемы формирования.

Биекция множеств. Мощность множества. Операции с кардинальными числами.

Формальная, математическая и диалектическая логики, их формирование и использование в школьной математике.

Раздел 3. **Логическая структура арифметики и ее преподавания.**

Логическая структура арифметики и ее преподавания. Натуральный ряд. Целые числа.

Определение рациональных чисел. Определение вещественных чисел. Проблемы расширения числовых множеств. Теория чисел. Теория делимости в  $Z$  и теория чисел. Десятичное представление числа. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения. Проблема Ферма.

Раздел 4. **Алгебраические уравнения и неравенства.**

Классические геометрические задачи, приводящие к алгебраическим уравнениям: удвоение куба, трисекция угла, деление окружности на равные части, построение циркулем и линейкой, только циркулем. Алгебраические и трансцендентные числа. Трансцендентность чисел  $e$  и  $\pi$ .

Общая формулировка о разрешимости алгебраического уравнения в радикалах.

Разрешимые группы. Группа Галуа. Теорема Галуа. Неразрешимость в радикалах уравнений выше четвертой степени. Примеры таких уравнений. Решение алгебраических уравнений 2, 3, 4 степеней в радикалах по схеме Галуа.

Приближенное решение алгебраических уравнений. Метод отделения корней.

Раздел 5. **Основные элементарные функции.**

Линейная функция. Графическое, арифметическое, аксиоматическое определения. Определение дифференциальным уравнением.

Показательная функция. Арифметическое и аксиоматическое определения. Определение с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Показательная функция на  $C$ .

Логарифмическая функция. Определение как обратной к показательной, аксиоматическое, и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Логарифмическая функция на  $C$ .

Степенная функция. Арифметическое, аксиоматическое определения и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Степенная функция на  $C$ .

Экспоненциальная функция  $e^{i\varphi}$ . Тригонометрические функции. Аксиоматическое определение тригонометрических функций  $\cos$ ,  $\sin$ . Модельное конструктивное определение  $\cos$ ,  $\sin$  (через углы и проекции). Определение тригонометрических функций через дифференциальное уравнение, интегралы, ряды. Обратные тригонометрические функции.

Неэлементарные функции в школьном курсе математики.

Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций, их определяющих.

Таблица 5.2.

## Распределение учебных часов

по темам и видам учебных занятий (общая трудоемкость учебной дисциплины — 13 зачетных единиц)

## Семестр 5

№п/п	Тема лекции, основное содержание	Количество часов		
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные работы
1	Основные этапы развития математики	2	1	0
2	Аксиоматический метод в построении математических структур, их моделирование. Основные математические структуры, возникающие в школьном курсе (эквивалентность, порядок, алгебраические, геометрические, топологические). Аксиоматика абстрактного множества. Теоретико-множественный язык и основные факты из теории множеств. Основные множества, возникающие в школьной математике (числовые, точечные, функциональные), уровень их изучения и проблемы формирования. Биекция множеств. Мощность множества. Операции с кардинальными числами. Формальная, математическая и диалектическая логики, их формирование и использование в школьной математике.	2	1	0
3	Логическая структура арифметики и ее преподавания. Натуральный ряд. Целые числа. Определение рациональных чисел. Определение вещественных чисел. Проблемы расширения числовых множеств. Теория чисел.	2	2	0
4	Теория делимости в $\mathbb{Z}$ и теория чисел. Десятичное представление числа. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения. Проблема Ферма.	2	2	0
5	Классические геометрические задачи, приводящие к алгебраическим уравнениям: удвоение куба, трисекция угла, деление окружности на равные части, построение циркулем и линейкой, только циркулем. Алгебраические и трансцендентные числа.	2	2	0

	Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$ .			
6	Общая формулировка о разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Разрешимые группы. Группа Галуа. Теорема Галуа. Неразрешимость в радикалах уравнений выше четвертой степени. Примеры таких уравнений. Решение алгебраических уравнений 2, 3, 4 степеней в радикалах по схеме Галуа. Приближенное решение алгебраических уравнений. Метод отделения корней.	2	2	0
7	Линейная функция. Графическое, арифметическое, аксиоматическое определения. Определение дифференциальным уравнением. Показательная функция. Арифметическое и аксиоматическое определения. Определение с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Показательная функция на $\mathbb{C}$ .	2	2	0
8	Логарифмическая функция. Определение как обратной к показательной, аксиоматическое, и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Логарифмическая функция на $\mathbb{C}$ .	2	2	0
9	Степенная функция. Арифметическое, аксиоматическое определения и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Степенная функция на $\mathbb{C}$ . Экспоненциальная функция $e^{i\varphi}$ . Тригонометрические функции. Аксиоматическое определение тригонометрических функций $\cos$ , $\sin$ . Модельное конструктивное определение $\cos$ , $\sin$ (через углы и проекции). Определение тригонометрических функций через дифференциальное уравнение, интегралы, ряды. Обратные тригонометрические функции.	2	2	0
10	Неэлементарные функции в школьном курсе математики. Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций, их определяющих	2	2	0

	<b>Итого:</b>	20	18	0
Самостоятельная работа студента, в том числе:	34	Формы текущего и рубежного контроля подготовленности обучающегося: Контрольные работы, тесты.		
- в аудитории под контролем преподавателя	2			
- курсовое проектирование (выполнение курсовой работы)	0			
- внеаудиторная работа	32			
Зачет				
Всего часов на освоение учебного материала	72			

## **5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

### *5.1. Учебно-методическое обеспечение.*

Успешное освоение курса требует напряженной самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя чтение лекций и рекомендованной литературы, решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях, разбор проблемных ситуаций. Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Для активизации самостоятельной работы студентов и экономии времени, отводимого на лекционный курс, ряд тем выносятся на самостоятельное изучение. Самостоятельная работа со студентами

проводится в часы самостоятельной работы в форме консультаций. Распределение часов руководства самостоятельной работой учитывает важность рассматриваемой темы и возможную сложность при освоении ее студентами. Самостоятельная работа студентов рассматривается как вид учебного труда, позволяющий целенаправленно формировать и развивать самостоятельность студента как личностное качество при выполнении различных видов заданий и проработке дополнительного учебного материала. Для успешного выполнения расчетных заданий, написания рефератов и подготовки к коллоквиуму, помимо материалов лекционных и практических занятий, необходимо использовать основную и дополнительную литературу, указанную в конце данной рабочей программы.

Для **самостоятельной работы** студентам подготовлены следующие вопросы:

1. Биекция множеств. Мощность множества. Операции с кардинальными числами.
2. Трансцендентность числа  $e$ .
3. Трансцендентность числа  $\pi$ .
4. Алгебра кватернионов.
5. Алгебра октав.
6. Уравнения с одним параметром.
7. Уравнения с двумя параметрами.
8. Абсолютная геометрия.
9. Постулат Лобачевского. Параллельные и сверхпараллельные прямые.
10. Угол параллельности и функция Лобачевского.
11. Пучки прямых на плоскости Лобачевского и их ортогональные траектории.
12. Интерпретации плоскости Лобачевского.
13. Сравнение разных аксиоматик евклидовой плоскости.
14. Квадрики на проективной плоскости.
15. Неэлементарные функции.
16. Приближенное вычисление интегралов.

Во время лекционных и практических занятий самостоятельная работа реализуется в виде решения студентами индивидуальных заданий, изучения части теоретического материала, предусмотренного учебным планом ООП.

Во внеаудиторное время студент изучает рекомендованную литературу, готовится к лекционным и практическим занятиям, собеседованиям, устным опросам, коллоквиуму и контрольным работам. При подготовке можно опираться на конспект лекций и литературу, предложенную в разделе 9 данной рабочей программы. В указанном разделе расположен список основной и дополнительной литературы, а также необходимые Интернет-ресурсы. Подготовка теоретического **сообщения** на практическое занятие выполняется студентом самостоятельно, но по согласованию с преподавателем темы сообщения. Это может быть, например, сообщение о жизни и деятельности великих ученых-математиков, теоремы, которых изучаются в данном курсе, или интересные замечания, факты по теме лекции (практического занятия).

## **6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

**Рубежный и суммарный рейтинг по дисциплине**

<b>Рейтинг первого контроля</b>	Контр. работа № 1	Лекции	Практические занятия	Посещаемость занятий
Количество баллов (20-35)	16	7	7	5
<b>Рейтинг второго контроля</b>	Контр. работа № 2	Лекции	Практические занятия	Посещаемость занятий
Количество баллов (21-35)	16	7	7	5

**Итоговая оценка по дисциплине**

<b>Оценка</b>	<i>Отлично</i>	<i>Хорошо</i>	<i>Удовлетворительно</i>	<i>Неудовлетворительно</i>
<b>рейтинг</b>	<b>91-100</b>	<b>81-90</b>	<b>61-80</b>	<b>0-60</b>

**Таблица 6.1**

**Шкала и критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена**

Оценка (баллы)	Уровень сформированности компетенций	Общие требования к результатам аттестации в форме зачета	Планируемые результаты обучения
«Зачтено» (61-100)	Высокий уровень	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки	Знать все методы  Уметь решать задачи Владеть всеми методами и способами доказательств
	Базовый уровень	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.	Знать основные методы решений задач  Уметь решать практические задачи  Владеть основными методами и способами

	Минимальный уровень	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.	доказательств Знать необходимый минимум методов Уметь решать стандартные задачи Владеть способами доказательств основных фактов
«Не зачтено» (менее 61)	компетенции, закреплённые за дисциплиной, не сформированы	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.	Планируемые результаты обучения не достигнуты

Таблица 6.2

**Соответствие форм оценочных средств темам дисциплины**

№ п/п	Тема	Форма оценочного средства
1-3	Основные этапы развития математики. Аксиоматический метод в построении математических структур, их моделирование. Основные математические структуры, возникающие в школьном курсе (эквивалентность, порядок, алгебраические, геометрические, топологические). Аксиоматика абстрактного множества. Теоретико-множественный язык и основные факты из теории множеств. Основные множества, возникающие в школьной математике (числовые, точечные, функциональные), уровень их изучения и проблемы формирования. Биекция множеств. Мощность множества. Операции с	Исследовательская домашняя работа № 1 (0-7 баллов)



	<p>кардинальными числами.</p> <p>Формальная, математическая и диалектическая логики, их формирование и использование в школьной математике.</p>	
1-3	<p>Основные этапы развития математики.</p> <p>Аксиоматический метод в построении математических структур, их моделирование.</p> <p>Основные математические структуры, возникающие в школьном курсе (эквивалентность, порядок, алгебраические, геометрические, топологические). Аксиоматика абстрактного множества. Теоретико-множественный язык и основные факты из теории множеств. Основные множества, возникающие в школьной математике (числовые, точечные, функциональные), уровень их изучения и проблемы формирования. Биекция множеств. Мощность множества. Операции с кардинальными числами. Формальная, математическая и диалектическая логики, их формирование и использование в школьной математике.</p>	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
4-6	<p>Логическая структура арифметики и ее преподавания. Натуральный ряд. Целые числа. Определение рациональных чисел. Определение вещественных чисел. Проблемы расширения числовых множеств. Теория чисел. Теория делимости в <math>Z</math> и теория чисел. Десятичное представление числа. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения. Проблема Ферма.</p>	Исследовательская домашняя работа № 2 (0-7 баллов)
4-6	<p>Логическая структура арифметики и ее преподавания. Натуральный ряд. Целые числа. Определение рациональных чисел. Определение вещественных чисел. Проблемы расширения числовых множеств. Теория чисел. Теория делимости в <math>Z</math> и теория чисел. Десятичное представление числа. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения. Проблема Ферма.</p>	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
7-8	<p>Классические геометрические задачи, приводящие к алгебраическим уравнениям: удвоение куба, трисекция угла, деление окружности на равные части, построение циркулем и линейкой, только циркулем. Алгебраические и трансцендентные числа.</p>	Исследовательская домашняя работа № 3

	<p>Трансцендентность чисел <math>e</math> и <math>\pi</math>.          Общая формулировка о разрешимости алгебраического уравнения в радикалах.          Разрешимые группы. Группа Галуа. Теорема Галуа. Неразрешимость в радикалах уравнений выше четвертой степени. Примеры таких уравнений. Решение алгебраических уравнений 2, 3, 4 степеней в радикалах по схеме Галуа.          Приближенное решение алгебраических уравнений. Метод отделения корней.</p>	
7-8	<p>Классические геометрические задачи, приводящие к алгебраическим уравнениям: удвоение куба, трисекция угла, деление окружности на равные части, построение циркулем и линейкой, только циркулем.          Алгебраические и трансцендентные числа.          Трансцендентность чисел <math>e</math> и <math>\pi</math>.          Общая формулировка о разрешимости алгебраического уравнения в радикалах.          Разрешимые группы. Группа Галуа. Теорема Галуа. Неразрешимость в радикалах уравнений выше четвертой степени. Примеры таких уравнений. Решение алгебраических уравнений 2, 3, 4 степеней в радикалах по схеме Галуа.          Приближенное решение алгебраических уравнений. Метод отделения корней.</p>	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)
9-10	<p>Линейная функция. Графическое, арифметическое, аксиоматическое определения. Определение дифференциальным уравнением.          Показательная функция. Арифметическое и аксиоматическое определения. Определение с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Показательная функция на <math>\mathbb{C}</math>.          Логарифмическая функция. Определение как обратной к показательной, аксиоматическое, и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Логарифмическая функция на <math>\mathbb{C}</math>.          Степенная функция. Арифметическое, аксиоматическое определения и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда.          Степенная функция на <math>\mathbb{C}</math>.</p>	Исследовательская домашняя работа № 4 (0-7 баллов)
9-10	<p>Линейная функция. Графическое, арифметическое, аксиоматическое определения. Определение дифференциальным уравнением.          Показательная функция. Арифметическое и аксиоматическое определения. Определение с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Показательная функция на <math>\mathbb{C}</math>.          Логарифмическая функция. Определение как обратной к показательной, аксиоматическое, и с</p>	Контрольная работа № 1 (0-16 баллов)

	<p>помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Логарифмическая функция на <math>C</math>.</p> <p>Степенная функция. Арифметическое, аксиоматическое определения и с помощью дифференциального уравнения, интеграла и ряда. Степенная функция на <math>C</math>.</p>	
--	--	--

## Задания для исследовательских домашних работ

### 1. Замечательные числа

Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 – это первое замечательное число. Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

**Класс:**  $\geq 1$ ,  $\leq 6$

**Раздел:** арифметика

### 2. Прямоугольники с заданной площадью

На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Для каких – два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

**Класс:**  $\geq 3$  (площадь, периметр),  $\leq 5$  (простые и составные числа)

**Раздел:** арифметика, геометрия

### 3. Разложение числа

Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел:  $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ . А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

**Класс:**  $\geq 5$  (делители)

**Раздел:** арифметика

#### 4. Суперкомпьютер

Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию- операцию смешивания двух чисел: из чисел  $m, n$  компьютер получает число  $(m+n) / 2$ . Если  $m+n$  – нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел  $m$  и  $n$  на суперкомпьютере можно получить единицу?

**Класс:**  $\geq 6$  (НОД)

**Раздел:** арифметика

#### 5. Диагонали прямоугольников

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером  $199 \times 991$  клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника – размером  $M \times N$  клеток.

*Примечание.* Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутри» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

**Класс:**  $\geq 6$  (НОД)

**Раздел:** арифметика

#### 6. Задача о размене

Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией  $ax+by$ , где  $a$  и  $b$  – данные натуральные числа,  $x$  и  $y$  – произвольные целые неотрицательные числа.

**Класс:**  $\geq 6$  (НОД)

**Раздел:** арифметика

#### 7. Складные квадраты

Складные числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$$5^2=2\underline{5}; \quad 6^2=3\underline{6}; \quad 25^2 = \underline{6}2\underline{5}.$$

«Пятью **пять** – двадцать **пять**», «шестью **шесть** – тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.

**Класс:**  $\geq 7$

**Раздел:** арифметика, алгебра

### 8. Поиск чисел с заданным количеством делителей

Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, - это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа  $N$  опишите все натуральные числа, имеющие ровно  $N$  делителей.

**Класс:**  $\geq 7$  (основная теорема арифметики)

**Раздел:** арифметика

### 9. Разложения дробей

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \frac{2}{7} = 0,(285714), \frac{3}{7} = 0,(428571), \dots$$

Для числа  $1/7$  разложение в десятичную дробь периодически и состоит из шести цифр, а для  $2/7, 3/7, \dots, 6/7$  — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для числа  $1/13$  и  $2/13$  наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида  $1/p, 2/p, \dots, (p-1)/p$ , для  $p = 17, 19, 41, 47$  и другим простым числам, и разберитесь, какие бывают циклы.

**Класс:**  $\geq 8$

**Раздел:** арифметика

### 10. Периодические последовательности

Найдите периоды последовательностей:

1)  $a_n \equiv n^m \pmod{k}$ ,

2)  $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$ , где  $\varphi_n$  – числа Фибоначчи.

**Класс:**  $\geq 9$  (арифметики остатков, бином Ньютона)

**Раздел:** арифметика

### 11. Классификация графиков дробно-квадратичных функций

Рассмотрим функцию  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ , где в числителе и в знаменателе – многочлены степени не выше второй. Какие типы графиков могут получиться (исследуйте количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т.д.)?

**Класс:**  $\geq 8$  (дробно-квадратичные функции)

**Раздел:** алгебра

### 12. Симметрические многочлены

Симметрические многочлены – это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются. Например:  $x^2+y^2$ ,  $x+y-xy$ . Многочлены  $u = x + y$  и  $v = xy$  называются элементарными симметрическими многочленами.

Верно ли, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных  $u$  и  $v$ ? Как это сделать быстро?

**Обобщение.** Поставьте и решите аналогичную задачу для симметрического многочлена от трёх переменных (сколько есть элементарных симметрических многочленов от  $x, y, z$ ?).

**Класс:**  $\geq 8$  (математическая индукция, бином Ньютона)

**Раздел:** алгебра

### 13. Многочлен с заданным нулём

Постройте многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ноль  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ . Постройте многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством.

**Обобщение.** Та же задача для суммы  $k$  квадратных корней из различных простых чисел.

**Класс:**  $\geq 8$  (квадратные уравнения, иррациональности)

**Раздел:** алгебра

### 14. Иррациональные корни

При каких целых  $a, b, c$  корни уравнения  $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$  записываются только через квадратичные иррациональности? (Допускается несколько знаков квадратного корня – один в другом.)

**Класс:**  $\geq 8$  (квадратные уравнения, замена переменных)

**Раздел:** алгебра

### 15. Количество решений

1. Исследуйте количество корней уравнения  $x^4 + px^2 + q = 0$  в зависимости от параметров  $p$  и  $q$ . Нарисуйте на плоскости параметров  $(p, q)$  области, соответствующие случаю 4, 3, 2 и т.д. корней.
2. Аналогичная задача для кубического многочлена  $x^3 + px + q = 0$ .
3. Исследуйте количество корней уравнения  $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$  в зависимости от параметров  $a, b$  и  $c$ . Изобразите соответствующие области в пространстве параметров  $(a, b, c)$ .

**Класс:**  $\geq 8$  (квадратные уравнения, теорема Безу)

**Раздел:** алгебра

### 16. Как увидеть симметрию многочлена?

Уравнение  $x(x+1)(x+2)(x+3)=1$  легко решается с помощью замены неизвестной. Для этого достаточно перемножить крайние скобки, перемножить средние скобки:

$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 1$  и сделать замену  $t = x^2 + 3x$ . Однако, если сразу раскрыть все скобки, то непонятно, как решать полученное уравнение (как увидеть нужную замену):

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Требуется исследовать, какая особенность левой части уравнения позволяет сделать нужную замену, какой класс уравнений можно решать подобным способом, как определять для многочлена стандартного вида, можно ли найти его корни соответствующей квадратичной заменой.

**Класс:**  $\geq 8$  (квадратные уравнения, замена переменной)

**Раздел:** алгебра

### 17. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k ; b)$

Рассмотрим координатную плоскость  $(k;b)$ . Каждая прямая вида  $y=kx+b$  изображается на этой плоскости в виде точки. На координатной плоскости  $(k;b)$  проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости  $(x;y)$ . Как эти семейства прямых связаны между собой? Аналогичный вопрос для трех параллельных прямых.

**Класс:**  $\geq 7$  (линейная функция)

**Раздел:** алгебра

### 18. Диофантово уравнение А.А. Маркова

Решить уравнение в целых числах:  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ .

**Класс:**  $\geq 8$  (квадратные уравнения, теорема Виета)

**Раздел:** алгебра, арифметика

### 19. Периодическая последовательность

Последовательность  $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$  ( $a_0 = 0, a_1 = 1$ ) является периодической (проверьте). При каких числах  $k$  и  $l$  последовательность  $a_{n+2} = ka_n + la_{n+1}$  получается периодической? Какой длины может быть период?

**Класс:**  $\geq 9$

**Раздел:** алгебра

**Контрольная работа № 1**

## Вариант № 1.

1. На доске нарисован многоугольник. Отметили середины его сторон, а сам многоугольник стёрли. Как восстановить многоугольник по серединам сторон? Сколько решений имеет задача?
2. На сколько частей можно разбить плоскость  $n$  прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?

## Вариант № 2.

1. Назовём многоугольник *равноугольным*, если у него все углы равны. Например, равноугольный четырёхугольник – это прямоугольник. У него равны противоположные стороны, диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам и т.д. А какие свойства есть у равноугольного *шестиугольника*?
2. На клетчатой бумаге обведён прямоугольник размером  $3 \times 4$  клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размерами  $n \times m$ .

## Контрольная работа № 2

### Вариант № 1.

1. Имеется несколько настоящих монет – все одного веса, и одна фальшивая – она легче. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах понадобится, чтобы определить фальшивую монету? Как надо взвешивать? Сначала решите задачу для 3, 9, 27 монет. Та же задача, если фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но неизвестно, в какую сторону.
2. В игре Ним играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в Ним.

### Вариант 2.

1. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?



2. Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Изучить эволюцию узоров.

### **Вопросы к зачету**

### **Вопросы к зачету.**

1. Структура аксиоматического метода.
2. Аксиоматика теории множеств.
3. Аксиоматика Пеано.
4. Основные аксиоматики евклидовой геометрии.
5. Логическая структура арифметики.
6. Непрерывные дроби.
7. Алгебраические и трансцендентные числа.
8. Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах.
9. Уравнения с параметрами.
10. Сравнение евклидовой плоскости с плоскостью Лобачевского.
11. Построение геометрий с помощью фундаментальной группы преобразований.
12. Параллельный перенос.
13. Проблемы измерения геометрических величин.
14. Классификация функций.
15. Основные элементарные функции. Разные способы определения.
16. Интегралы Римана и Лебега.

## **9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) Основная литература.**

1. Математический энциклопедический словарь. Гл.ред. Ю.В. Прохоров. –М.: Сов. энциклопедия, 1988.
2. Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – М.: Наука, 1987.
3. Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. т. 2. Геометрия. – М.: Наука, 1987.
4. В.А. Любецкий. Основные понятия школьной математики. – М.: Просвещение, 1988.
5. И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973.

### **б) Дополнительная литература.**

1. А.В. Бритов. Логическая структура арифметики и ее преподавания. – В кн.: Пути оптимизации обучения математике в вузе и школе. Саранск, 1986, с. 107-116.
2. И.И. Чучаев. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений: Учебн. Пособие. – Саранск: Изд-во Мордов. Ун-та, 2001.
3. Учебники по алгебре, геометрии, анализу.

### **Программное обеспечение и Интернет - ресурсы:**

<http://www.lib.mexmat.ru> - Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета

<http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.benran.ru/> - Библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

## **10 . Материально-техническое обеспечение**

Аудитории, оборудованные досками для мела, компьютерные классы, оборудованные для проведения практических занятий, библиотека и читальный зал, подключенные к сети Интернет.