МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ З.О.Батыгов
_____ 05 ____ 2018 г.

Методическое пособие

Теория функций комплексного переменного.

Раздел: Конформные отображения.

Напрвление подготовки 01.03.01 – Математика

Программа *академический бакалавриат*

Квалификация *бакалавр*

Форма обучения *очная*

Факультет *физико-математический*

Кафедра *Математический анализ*

Магас 2018

УДК 517.55

Султыгов М.Д.   Теория функций комплексного переменного.
Раздел: Конформные отображения. ИнгГУ,2017 – 46 с.
Библиография: 7 назв.

Настоящее методическое пособие «Конформные отображения» в курсе «Геометрическая теория функций комплексного переменного» предназначена для студентов 3 курса физико-математического факультета специальности «Математика» и «Физика» высшего образования.

Печатается в соответствии с решением УМС ИнгГУ, протокол № 6 от 28.02.2018 года.

Рецензент: заведующая кафедрой «Математика» СКГТУ (СКГМИ) кандидат физико-математических наук, доцент Вазиева Л.Т.

Содержание

Введение

Прежде хотелось поделиться некоторыми соображениями, которыми я руководствовался при написании настоящего учебного пособия. Опросив студентов и преподавателей, любезно согласившихся поделиться своими мнениями, я пришел к выводу, что даже после значительных переработок и дополнений ограничиться простым переизданием предыдущего издания подобного пособия не представляется возможным. Выбрав альтернативный вариант написания нового пособия, было принято решение рассмотреть вопросы конформного отображения на примерах дробно-линейных функциях, степенных функциях, функции Жуковского и $w = e^z$, принимая во внимание огромное многообразие дидактических схем, которые широко поощряются педагогической автономией, царящей ныне в российской высшей школе.

Предлагаемое методическое пособие представляет собой, таким образом, часть курса геометрической теории функции комплексного переменного, предназначенного для студентов и аспирантов, желающих глубже изучить конформные отображения. Автор не претендует на фундаментальные вопросы конформного отображения, ибо программа высшей школы этого не предусматривает.

С большим удовольствием я пользуюсь возможностью поблагодарить всех тех, чья помощь сделала возможным появлением этого пособия.

§ 1. Основные понятия

Через C будем обозначать комплексную плоскость, т.е. множество всех комплексных чисел, а через $\overline{C}$ - расширенную комплексную плоскость, пополненную одной бесконечно удаленной точкой. На C и $\overline{C}$ обычным образом вводится топология/окрестностью конечной точки z_0 считают любой круг $\{z : |z - z_0| < r\}$, окрестностью бесконечно удаленной точки - любое $\{z : |z| > R\}$ множество.

Пусть D - множество расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ и f - функция, комплексного переменного определенная на D. Функция f отображает множество D на множество $f(D)$. Удобно считать, что множество D лежит в плоскости $\overline{C_z}$ - комплексного переменного z, а $f(D)$ в плоскости $\overline{C_w}$ - комплексного переменного w.

Определение 1. Пусть $D \subset \overline{C_z}$ -область и f - непрерывная функция комплексного переменного определенная на D. Отображение $w = f(z)$ называется конформным в точке $z_0 \in D$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0, и обладает свойством постоянства растяжений в этой точке.

Точное определение понятий «сохраняет углы между кривыми» и «обладает свойством постоянства растяжений» можно почерпнуть в любом курсе по теории функций комплексного переменного /см., например, [1], стр. 283-284, [2] стр. 96-99, [3] стр. 41-44/. Мы на этом останавливаться не будем. Особо отметим случаи, когда $z_0 = \infty$ или $f(z_0) = \infty$ / или и то другое вместе/.

Определение 2. Говорят, что отображение $w = f(z)$ конформно в бесконечно удаленной точке, если отображение $w_1 = \varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформно в точке $z = 0$. Если $f(z_0) = \infty$, z_0 -конечная точка, то говорят, что $w = f(z)$ конформно в точке z_0, если $w_1 = \varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ конформно в этой точке.

И, наконец, если $z_0 = \infty$ и $f(z_0) = \infty$, то говорят, что $w = f(z)$ конформно в точке z_0, если отображение $w_1 = \varphi(z) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ конформно в точке $z = 0$.

Из свойств конформных отображений отметим следующее:

Суперпозиция конформных отображений есть конформное отображение.

В курсах ТФКП доказывается /см. [2] стр. 43/.

Теорема 1.1. Если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset C_z$ и в точке $z_0 \in D$ ее производная отлична от нуля, то отображение $w = f(z)$ конформно в точке z_0.

Определение 3. Функция $f(z)$, определенная на множестве $F \subset \overline{C_z}$, называется однолистной на F ,если из соотношений $z_1, z_2 \in F$ и $z_1 \neq z_2$ следует, что $f(z_1) \neq f(z_2)$. **Отображение $w = f(z)$ осуществляемое однолистной функцией f, называется также однолистным.**

Определение 4. Пусть *D* - область расширенной комплексной плоскости $\overline{C_z}$ и функция f определена в *D*. Если функция f однолистна в *D*, а отображение $w = f(z)$ конформно в каждой точке области *D*, то это отображение называют конформным в области *D*.

Из теоремы 1.1 и свойств однолистных функций следует

Теорема 1.2. Пусть *D* - область комплексной плоскости C_z , а функция f определена в D . Тогда если:

1) f - аналитична в *D*,

2) f - однолистна в *D*,

то отображение $w = f(z)$ конформно в области *D*.

Проиллюстрируем применение приведенных выше понятий и результатов на примере линейной функции.

Линейной называют функцию вида $w = az + b, a \neq 0$**.** Очевидно эта функция однолистна на всей расширенной комплексной плоскости, отображает $\overline{C_z}$ на $\overline{C_w}$, $w(\infty) = \infty$, и аналитична в C_z, причем в любой конечной точке ее производная $w' = a \neq 0$. В силу теоремы 1.2 линейная функция осуществляет конформное отображение любой области $D \subset C_z$. Более того, легко показать, что отображение $w = az + b$ конформно и в бесконечно удаленной точке. Для этого, согласно определению 2, нужно рассмотреть отображение $\varphi(z) = \dfrac{1}{\frac{a}{z} + b} = \dfrac{z}{a + bz}$ в точке $z = 0$. Нетрудно заметить, что функция $\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = 0$ и

$$\varphi'(z)\Big|_{z=0} = \frac{a + bz - bz}{(a + bz)^2}\Big|_{z=0} = \frac{a}{(a + bz)^2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{a} \neq 0.$$

По теореме 1.2 отображение $w_1 = \varphi(z)$ конформно в точке $z = 0$, а, значит, отображение $w = az + b$ конформно в точке $z = \infty$.

Заметим здесь же, что общая линейная функция есть суперпозиция трех простейших:

1) $w = z + b$ (сдвиг на вектор b);
2) $w = kz$, $k -$положительное число (гомотетия);
3) $w = e^{i\varphi} z$ (поворот на угол φ).

(см. Рис.1,2,3 соответственно).

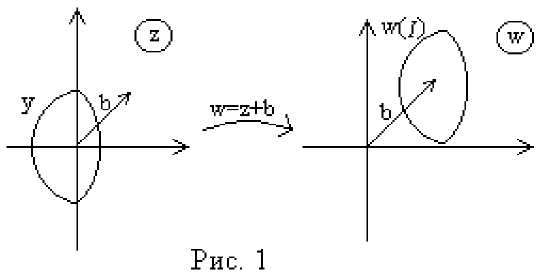


Рис. 1

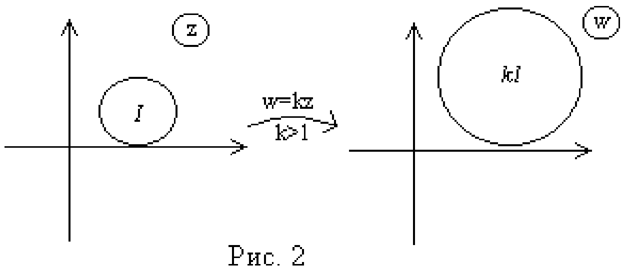


Рис. 2

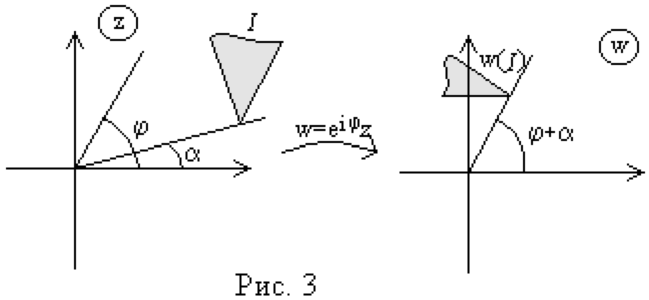


Рис. 3

§ 2 Дробно-линейная функция

Дробно-линейной функцией /Д.л.ф./ называют функцию вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (1)$$

где a, b, c, d **- постоянные комплексные числа, причем** $ad - bc \neq 0$ (в противном случае д.л.ф. вырождается в функцию тождественно равную постоянной).

Дробно-линейная функция не определена в точках $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. По определению полагаем $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \frac{a}{c}$. Теперь дробно-линейная функция (1) определена на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{C_z}$ и отображает ее, как нетрудно видеть, на $\overline{C_w}$. Перечислим основные свойства дробно-линейной функции. Некоторые из них мы докажем, доказательства других можно найти в любой из книг [1]–[3].

1^0**. Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости** $\overline{C_z}$ **на расширенную комплексную плоскость** $\overline{C_w}$ **.**

В самом деле, так как уравнение (1) однозначно разрешимо относительно z при любом $w \in \overline{C_w}$, то функция (1) однолистна в $\overline{C_z}$ и отображает $\overline{C_z}$ на $\overline{C_w}$. Кроме того,

$$w' = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

в любой точке $z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty$. По теореме 1.2 отображение (1) конформно в каждой такой точке. Конформность в точках $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$ доказывается на основании определения 2 и теоремы 1.2 так же, как это было сделано в §1 для линейной функции.

2^0. **Дробно-линейная функция полностью определяется тремя параметрами.**

Действительно, если $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ и $w\neq 0$, то хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю. Пусть это b.

Тогда

$$w=\frac{\frac{a}{b}z+1}{\frac{c}{b}z+\frac{d}{b}}$$

и тройка чисел $\frac{a}{b},\frac{c}{b}$ и $\frac{d}{b}$ полностью определяет д.л.ф. w. Отсюда следует, что дробно-линейная функция определяется своими значениями в трех попарно различных точках.

Иными словами, если известно, что дробно-линейная функция w в трех попарно различных точках z_1,z_2,z_3 принимает соответственно значения w_1,w_2,w_3, то записывая w в виде (1) и решая систему уравнений

$$w(z_j)=w_j,\ j=1,2,3 \qquad (2)$$

находим три параметра, которые ее определяют.

В тех случаях, когда z_1,z_2,z_3, w_1,w_2,w_3 -конечные числа, для нахождения д.л.ф. w, удовлетворяющей условиям (2) чаще всего пользуются формулой

$$\frac{\dfrac{w-w_1}{w-w_2}}{\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}}=\frac{\dfrac{z-z_1}{z-z_2}}{\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} \qquad (3)$$

3^0. **Дробно-линейная функция отображает окружность или прямую в окружность или прямую.** Если прямую считать окружностью бесконечно большого радиуса, то это свойство можно сформулировать так: при отображении дробно-линейной функцией окружность переходит в окружность.

Заметим, что при отображении функцией (1) все прямые и окружности, проходящие через точку $z=-\frac{d}{c}$, преобразуются в прямые плоскости $\overline{C_w}$, а прямые и окружности, не проходящие через точку $z=-\frac{d}{c}$ в окружности (конечного радиуса) плоскости $\overline{C_w}$.

4^0. **При дробно-линейном отображении пара симметричных относительно окружности точек переходит в пару точек, симметричных относительно отображенной окружности.**

Отметим, что точки a и b называются симметричными относительно окружности $K=\{z:|z-c|=R\}$, если

1) $|a-c|\cdot|b-c|=R^2$;

2) $\arg(a-c)=\arg(b-c)$.

Иначе говоря, точки a и b называются симметричными относительно окружности K, если они лежат на одном луче, исходящем из центра окружности, и произведение их расстояний до центра равно квадрату радиуса.

Две точки a и b называются симметричными относительно прямой, если отрезок, соединяющий эти точки перпендикулярен прямой, и делится этой прямой пополам.

Из приведенных свойств дробно-линейных отображений выводятся следующие утверждения.

Теорема 2.1. Всякое дробно-линейное отображение, переводящее круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$, осуществляется функцией

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где $|a|<1$, а φ - действительное число.

Теорема 2.2. Всякое дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w : |w| < 1\}$, осуществляется функцией

$$w = e^{i\varphi}\,\frac{z-b}{z-\bar{b}}$$

где $\operatorname{Im} b > 0$, а φ - вещественное число.

Теорема 2.3. Для того, чтобы дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ отображала верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a, b, c, d были вещественными числами и $ad - bc > 0$.

Замечание. Отображения, фигурирующие в этих теоремах, будучи дробно-линейными, необходимо конформны.

Рассмотрим основные типы задач на нахождение конформных отображений с помощью дробно-линейной функции.

Задача 1. Найти дробно-линейную функцию w, переводящую точки -1, i, $1+i$, соответственно в точки 0, $2i, 1-i$.

Решение. Применяя формулу (3) , получаем

$$\frac{\dfrac{w-0}{w-2i}}{\dfrac{1-i-0}{1-i-2i}} = \frac{\dfrac{z+1}{z-i}}{\dfrac{1+i+1}{1+i-i}}.$$

Отсюда

$$\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{1}{2+i} = \frac{w}{w-2i}\cdot\frac{1-3i}{1-i}$$

и

$$(z+1)(w-2i)(1-i) = w(z-i)(2+i)(1-3i).$$

Разрешая последнее равенство относительно w, получим

$$w=\frac{2i(z+1)(1-i)}{(z+1)(1-i)-(z-i)(1-3i)(2+i)}=\frac{2iz+2i}{-4z+1+5i}.$$

Эту же задачу можно решить, используя свойство 2^0 дробно-линейных функций. Для этого искомую дробно-линейную функцию w записываем в виде $w=\frac{az+b}{cz+d}$ и выписываем систему уравнений $w(z_j)=w_j$, $j=1,2,3$. В данном случае эта система имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{-a+b}{-c+d}=0,\\ \dfrac{ai+b}{ci+d}=2i,\\ \dfrac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d}=1-i.\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $a=b$. Далее, очевидно, что $b\neq 0$, поэтому, деля во всех уравнениях числитель и знаменатель на b, получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=1,\\ \dfrac{\frac{a}{b}i+1}{\frac{c}{b}i+\frac{d}{b}}=2i,\\ \dfrac{\frac{a}{b}(1+i)+1}{\frac{c}{b}(1+i)+\frac{d}{b}}=1-i.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\frac{a}{b},\frac{c}{b},\frac{d}{b}$ и тем самым дробно – линейную функцию w.

Заметим, что второй способ более трудоемок и его целесообразнее применять, когда среди точек z_j,w_j есть бесконечно удаленные или нули.

Рассмотрим пример.

Задача 2. Найти дробно-линейную функцию, w переводящую точки $-1, \infty, i$, соответственно в точки $\infty, i, 1$.

Решение. Искомую дробно-линейную функцию запишем в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Так как $w(-1) = \infty$, то, в силу сказанного в начале этого параграфа $c \cdot (-1) + d = 0$, т.е. $c = d$ и потому $w = \frac{az + b}{c(z+1)}$. Отсюда следует, что $c \neq 0$.

Поделив числитель и знаменатель на c получаем

$$w = \frac{\frac{a}{c} z + \frac{b}{c}}{z + 1}.$$

Далее, поскольку $w(\infty) = i$, то $\frac{a}{c} = i$, т.е.

$$w = \frac{iz + \frac{b}{c}}{z + 1}.$$

Учитывая теперь условие $w(i) = 1$ получаем уравнение для определения $\frac{b}{c}$

$$1 = \frac{i^2 + \frac{b}{c}}{i + 1}$$

Откуда $\frac{b}{c} = 2 + i$.

Окончательно имеем

$$w = \frac{iz + 2 + i}{z + 1}.$$

Часто на практике для нахождения дробно-линейных функций, осуществляющих заданные конформные отображения, удобно пользоваться теоремами 2.1 – 2.3. Следует отметить, что в отличие от общей дробно-линейной функции, которая зависит от трех комплексных параметров, функции в теоремах 2.1 – 2.2 зависят от одного вещественного и одного комплексного параметров, а в теореме 2.3 – от трех вещественных параметров, подчиненных дополнительному условию.

Задача 3. Найти дробно-линейную функцию w отображающую верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. В силу теоремы 2.2 любая дробно-линейная функция, осуществляющая отображение $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на $\{w : |w| < 1\}$, имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-b}{z-\bar{b}}, \quad \operatorname{Im} b > 0.$$

Используя первое условие задачи, получаем

$$0 = e^{i\varphi} \frac{i-b}{i-\bar{b}}.$$

Отсюда $b = i$, $\bar{b} = -i$. Поэтому

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i}.$$

Осталось найти параметр φ. Вычислим производную w'.

Имеем

$$w' = e^{i\varphi} \frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\varphi} \frac{2i}{(z+i)^2}.$$

(Множитель $e^{i\varphi}$ есть константа!)

В точке $z = i$

$$w'(i) = e^{i\varphi} \frac{2i}{(2i)^2} = \frac{e^{i\varphi}}{2i}.$$

Таким образом,

$$\arg w'(i) = \arg e^{i\varphi} - \arg(2i) = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая второе условие задачи, получаем

$$-\frac{\pi}{2} = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $\varphi = 0$ и искомая д.л.ф. имеет вид

$$w=\frac{z-i}{z+i}.$$

Задача 4. Найти дробно-линейную функцию w отображающую единичный круг $\{z:|z|<1\}$ на единичный круг $\{w:|w|<1\}$ так, чтобы $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Поступаем так же, как и при решении предыдущей задачи, но пользуемся уже теоремой 2.1. По этой теореме всякая дробно-линейная функция, осуществляющая искомое отображение, имеет вид

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad |a|<1.$$

Из условия $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$ находим, что $a=\frac{i}{2}$, т.е.

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-\frac{i}{2}}{1+z\frac{i}{2}}.$$

Далее

$$w'(z)\Big|_{z=\frac{i}{2}}=e^{i\varphi}\left.\frac{1+\frac{iz}{2}-\left(z-\frac{i}{2}\right)\frac{i}{2}}{\left(1+\frac{iz}{2}\right)^2}\right|_{z=\frac{i}{2}}=\left.\frac{\frac{3}{4}e^{i\varphi}}{\left(1+\frac{iz}{2}\right)^2}\right|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{\frac{3}{4}e^{i\varphi}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{4}{3}e^{i\varphi}.$$

Учитывая второе условие, получаем

$$\frac{\pi}{2}=\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\arg\left(\frac{4}{3}e^{i\varphi}\right)=\varphi.$$

Таким образом,

$$w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}z+1}=i\frac{2z-i}{iz+2}=\frac{2iz+1}{iz+2}.$$

Аналогичным образом с применением теоремы 2.3 решается

Задача 5. Найти дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$ так, чтобы $w(1)=2, w(i)=2+i.$

Замечание. При решении этой задачи следует учесть, что одно комплексное равенство эквивалентно двум вещественным.

Существует серия на определение д.л.ф., которые внешне похожи на задачи 3-5, но при их решении пользуются не теоремами 2.1-2.2, а свойством 4^0 дробно-линейных отображений. Рассмотрим примеры.

Задача 6. Найти д.л.ф. w, отображающую верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, чтобы $w(1)=i$, $w(i)=\dfrac{2+i}{5}$.

Решение. Если дробно линейная функция отображает полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$, то границу этой полуплоскости – вещественную прямую $\{z:\operatorname{Im}z=0\}$ она отображает на границу круга $\{w:|w|<1\}$ - окружность $\{w:|w|=1\}$. Точки i и $-i$ симметричны относительно вещественной оси. По условию точка i отображается в точку $\frac{1}{5}(2+i)$. В силу свойства 4^0 дробно- линейных функций точка $-i$ перейдет в точку a, симметричную точке $\frac{1}{5}(2+i)$ относительно окружности $\{w:|w|=1\}$. Найдем точку a. На основании условий симметрии относительно окружности запишем

$$\frac{1}{5}|2+i|\cdot|a|=1,$$

$$\arg\frac{2+i}{5}=\arg a.$$

Поскольку $\frac{1}{5}|2+i|=\frac{1}{5}\sqrt{4+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, то из первого условия находим, что $|a|=\sqrt{5}$. Второе условие утверждает, что точки a и $\dfrac{2+i}{5}$ лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Поэтому $a=\rho(2+i)$, где ρ- некоторое положительное число. Число ρ находим из равенства $|a|=\rho|2+i|$. Имеем $\sqrt{5}=\rho\sqrt{5}$, т.е. $\rho=1$ и a=2+i.

Итак, искомая дробно-линейная функция удовлетворяет условиям $w(1)=i,\ w(i)=\frac{1}{5}(2+i),\ w(-i)=2+i$.

Поступая теперь так же, как в задаче 1, находим, что

$$w=\frac{(2+i)z-5i}{(2i-1)z-4i-3}.$$

Осталось показать, что полученная нами функция действительно отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг.

После несложных преобразований имеем

$$w=\frac{2+i}{2i-1}\frac{z-\dfrac{5i}{2+i}}{z-\dfrac{4i+3}{2i-1}}=-i\frac{z-(1+2i)}{z-(1-2i)}.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.2, следует, что w обладает нужным свойством. Аналогично решается

Задача 7. Найти дробно-линейную функцию w, отображающую круг $\{z:|z|<1\}$на круг $\{w:|w|<1\}$ так, чтобы $w(i)=i,\ w\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{4i}{5}$.

Решение. Искомая дробно-линейная функция отображает окружность $\{z:|z|=1\}$ на окружность $\{w:|w|=1\}$. Точка a, симметричная точке $\frac{i}{2}$ относительно окружности $\{z:|z|=1\}$ перейдет в точку в, симметричную точке $\frac{4i}{5}$ относительно окружности $\{w:|w|=1\}$. Легко видеть, что a=2i.

Так как $arq\,b = \arg\frac{4}{5}i$, то $b = \rho i$, где $\rho > 0$. В силу первого условия симметричности

$$\left|\frac{4}{5}i\right| \cdot |b| = 1 \Rightarrow \frac{4}{5}\rho = 1 \Rightarrow \rho = \frac{5}{4}$$

Следовательно, $b = \frac{5}{4}i$.

Таким образом, задача состоит в нахождении д.л.ф. w удовлетворяющей условиям:

$$w(i) = i,\ w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4}{5}i,\ w(2i) = \frac{5}{4}i.$$

Поступая так же, как и в задаче 1, находим, что

$$w = \frac{2z + i}{2 - iz} = \frac{z + \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}z}$$

В силу теоремы 2.1 найденная функция решает задачу.

<u>Задачи для самостоятельного решения.</u>

1. Найти дробно – линейную функцию *w*, такую, что:

а) $w(-1)=i,\ \ w(i)=\infty,\ \ w(1+i)=1;$

б) $w(-1)=i,\ \ w(\infty)=1,\ \ w(i)=1+i;$

в) $w(-1)=0,\ \ w(\infty)=\infty,\ \ w(i)=1;$

г) $w(1)=1,\ \ w(i)=i,\ \ w(0)=-1;$

д) $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \ w(i)=i,\ \ w(0)=-1;$

Ответы: а) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$; б) $w=\frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$;

в) $w=\frac{(1-i)}{2}(z+1)$; г) $w=\frac{(3i-1)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; д) $w=\frac{-(7+i)z+2+i}{-(1-2i)z-(2+i)}$.

2. Найти дробно – линейную функцию *w*, отображающую круг $\{z:|z|<1\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что:

а) $w\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ \arg\ w'\left(\frac{1}{2}\right)=0;$

б) $w(0)=0,\ \arg\ w'(0)=-\frac{\pi}{2};$

в) $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \arg\ w'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Ответы: а) $w=\frac{2z-1}{2-z}$; **б)** $w=-iz$; **в)** $w=\frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$.

3. Найти дробно – линейную функцию *w*, отображающую верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на круг $\{w:|w|<1\}$ так, что:

а) $w(1+2i)=0,\ \arg\ w'(1+2i)=\pi;$

б) $w(i)=0,\ \arg\ w'(i)=\frac{\pi}{2};$

в) $w(1+i)=\frac{1}{2},\ \arg\ w'(1+i)=\pi;$

Ответы: а) $w=-i\dfrac{z-1-2i}{z-1+2i}$; **б)** $w=\dfrac{i-z}{i+z}$; **в)** $w=\dfrac{(1-2i)z+3i-3}{(2-i)z+3i-3}$**.**

4. Найти дробно – линейную функцию *w*, отображающую верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ **на верхнюю полуплоскость** $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$ **так, что:**

а) $w(-1)=0,\ w(0)=2,\ w(1)=\infty$**;**

б) $w(-1)=-2,\ w(i-2)=1+3i$**;**

в) $w(i+1)=i,\ \arg\ w'(i-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $w=\dfrac{2z+2}{1-z}$**; б)** $w=\dfrac{z-1}{z+2}$; **в)** $w=\dfrac{3z-4}{z+2}$.

5. Найти дробно – линейную функцию:

а) отображающую полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ **на круг** $\{w:|w|<1\}$ **так, что** $w(0)=1,\ w(2i)=0;$

б) отображающую круг $\{z:|z|<1\}$ **на круг** $\{w:|w|<1\}$ **так, что** $w(1)=-i,\ w(2i)=3i;$

в) отображающую верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ **на верхнюю полуплоскость** $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$ **так, что** $w(1)=3,\ w(i)=2i;$

Ответы: а) $w=-\dfrac{z-2i}{z+2i}$; **б)** $w=\dfrac{(11+4i)z-1-4i}{-(4+i)z+4+11i}$**; в)** $w=\dfrac{10z+2}{5-z}$.

6. Найти дробно – линейную функцию *w*:

а) отображающую круг $\{z:|z|<1\}$ **на круг** $\{w:|w-1|<1\}$ **так, что** $w(0)=\dfrac{1}{2},\ w(1)=0;$

б) отображающую круг $\{z:|z-2|<1\}$ **на круг** $\{w:|w-2i|<2\}$ **так, что** $w(2)=i,\ \arg w'(2)=0;$

в) отображающую круг $\{z : |z| < 2\}$ на полуплоскость $\{w : \mathrm{Re}\, w > 0\}$ так, что $w(0) = 1,\ \arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $w = \dfrac{1-z}{2+z}$; **б)** $w = \dfrac{2z - 4 + 2i}{iz + 2 - 2i}$; **в)** $w = \dfrac{2i + z}{2i - z}$.

Замечание 1. В задачах 2 в) и 3 б) удобно ввести промежуточную плоскость C_ξ переменного ξ и отобразить фигурирующие в условии задачи области на некоторую область плоскости C_ξ, а затем взять подходящую суперпозицию отображений.

Так, например, для решения задачи 2 в) найдем две д.л.ф. $\xi = \xi_1(z)$ и $\xi = \xi_2(w)$ удовлетворяющие условиям:

$$\{z : |z| < 1\} \xrightarrow{\xi_1} \{\xi : |\xi| < 1\}:\ \xi_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg \xi'_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\{w : |w| < 1\} \xrightarrow{\xi_2} \{\xi : |\xi| < 1\}:\ \xi'_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg \xi'_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Далее, легко видеть, что искомая д.л.ф. имеет вид

$$w = \xi_2^{-1}(\xi_1(z)).$$

На практике обычно записывают равенство $\xi_1(z) = \xi_2(w)$ и из него выражают w через z.

Замечание 2. Задачи 6 с помощью простых замен сводятся к уже рассмотренным типам задач.

§ 3.Функция Жуковского

Функцией Жуковского называют рациональную функцию

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \equiv \lambda(z).$$

Перечислим ее свойства / см. 1, стр. 306-309/

1 . **Функция Жуковского однолистная в области** $D \subset \overline{C}_z$ **тогда и только тогда, когда *D* не содержит ни одной пары точек z_1 и z_2, связанных соотношением $z_1 \cdot z_2 = 1$.**

Последнему условию удовлетворяют, например, внутренность или внешность единичного круга: $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$ верхняя или нижняя полуплоскости: $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

2. Отображение $w = \lambda(z)$ конформно в любой точке, отличной от точек $z = \pm 1$.

3. При отображении функций Жуковского:

а) окружности $\{z : |z| = r\}$ и $\{z : |z| = 1/2\}$, $0<r<1$, переходят в один и тот же эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями $\frac{1}{2}\left(r \pm \frac{1}{2}\right)$;

б) окружность $\{z : |z| = 1\}$ отобразится на отрезок $[-1,1]$ проходимый дважды; при этом, когда z пробегает верхнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ против часовой стрелки, то точка $w = \lambda(z)$ пробегает отрезок [-1, 1] от точки w=1до точки w=-1; когда же z пробегает нижнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ против часовой стрелки, то точка $w = \lambda(z)$ пробегает тот же отрезок от точки w=-1 до точки w=1;

в) лучи $[0,+\infty]$ и $[-\infty,0]$ переходит соответственно в лучи $[1,+\infty]$ и $[-\infty,-1]$, проходимые дважды. Например если z пробегает луч $[0,+\infty]$, то, когда z возрастает от 0 до 1, то $w=\lambda(z)$ проходит луч $[1,+\infty]$ справа налево, т.е. от точки w=+∞ к точке w=1, а когда z возрастает от +1 до +∞, то точка w пробегает этот же луч слева направо, т.е. от точки w=1 к точке w=+∞.

4. Функция Жуковского конформно отображает:

а) круг {z:|z|<1} так же, как и его внешность {z:|z|>1} на всю плотность $\hat{C}_w$ с разрезом по отрезку [-1,1]. (см. рис.4);

б) полукруг {z:|z|<1, *Im z*>0} на нижнюю полуплоскость {*w:Imw*<0}, а полукруг {z:|z|<1, *Im z*>0} на верхнюю полуплоскость {*w:Imw*>0} (см. рис.5);

в) верхнюю полуплоскость {*z:Imz*>0} (так же, как и нижнюю –

{*z:Im z*<0}) на плоскость $\hat{C}_w$ с разрезом по лучам [-∞,-1] и [1,+∞] (см.рис.6).

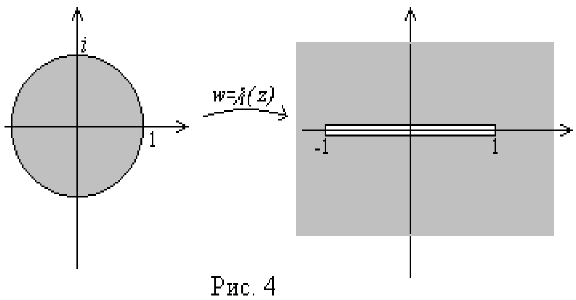


Рис. 4

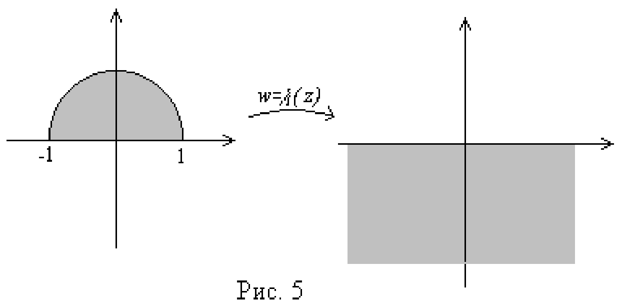


Рис. 5

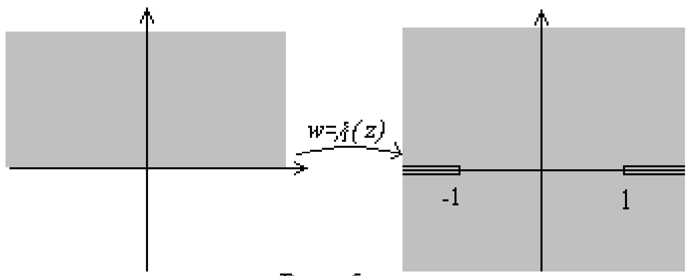


Рис. 6

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Найти образ области *D*={z:|z|<1, $z \notin [1]$} при отображении функций Жуковского, если а) $c = \frac{1}{2}$, б) $c = -\frac{1}{2}$

Решение. Согласно свойству 4. а) круг {z:|z|<1} отобразится функцией Жуковского на всю плоскость $\hat{C}_w$ с разрезом по отрезку [-1,1]. Обозначим эту область через I_1. Найдем образ промежутка [C,1] при отображении

w=$\lambda(z)$ и исключим его из области I_1. Полученная область и будет искомой. Случай а) и б) рассмотрим отдельно.

а) $c=\frac{1}{2}$. В этом случае функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ переводит отрезок $\left[\frac{1}{2},1\right]$ в отрезок $\left[1,\frac{5}{4}\right]$. В самом деле, функция $\lambda(z)$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$, крот того ее производная $\lambda'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)<0$ для любых $z\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. Значит, на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ она монотонно убывает от значения $w=\frac{5}{4}$ до значения w=1 принимая в силу известной теоремы анализа, все промежуточные значения. Очевидного промежуток $\left[\frac{1}{2},1\right]$ перейдет в промежуток $\left[1,\frac{5}{4}\right]$.

б) $c=-\frac{1}{2}$. В этом случае поступим следующим образом. Разобьем промежуток $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ на два $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ и $[0,1]$. Как и прежде, показывает, что образом первого из них является луч $\left[-\infty,-\frac{5}{4}\right]$, а второго – луч $[1,+\infty]$. Поэтому весь промежуток переходит в объединение двух лучей $\left[-\infty,-\frac{5}{4}\right]\cup$ $[1,+\infty]$.

Итак, образом области D при отображении функцией Жуковского является:

при $c=\frac{1}{2}$ - вся плоскость с разрезом по отрезку $\left[-1,\frac{5}{4}\right]=[-1,1]\cup\left[1,\frac{5}{4}\right]$;

при $c=-\frac{1}{2}$ - вся плоскость с разрезом по лучам $\left[-\infty,-\frac{5}{4}\right]$ и $[-1,+\infty]=[-1,1]\cup[1,+\infty]$. При этом в обоих случаях отображение является конформным.

Задача 2. Отобразить конформно область $D=\{z:|z|>1, z\notin[-2,-1]\cup[1,2]\}$ на плоскость с разрезом по лучу $[0,+\infty]$.

Решение. Функция Жуковского $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает внешность единичного круга $\{z : |z| > 1\}$ на всю плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по отрезку $[-1:1]$. Как и раньше, нетрудно проследить, что отрезок [-2:-1] при этом отображается на отрезок $\left[-\frac{5}{4}, -1\right]$, а отрезок [1:2] - на $\left[1, \frac{5}{4}\right]$. Поэтому функция w_1отобразит область D на область I_1- всю плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по отрезку $\left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right]$(см. рис.7).

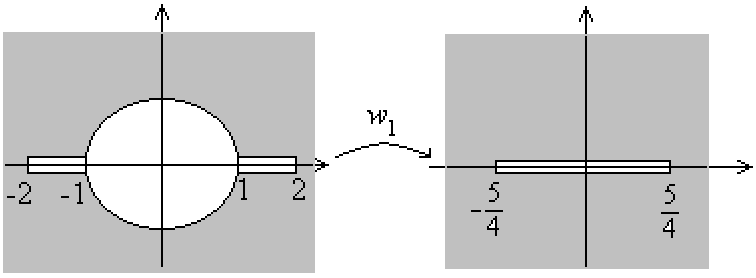


Рис. 7

Преобразуем плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с помощью дробно-линейной функции

$$w = \frac{\frac{5}{4} + w_1}{\frac{5}{4} - w_1} = \frac{5 + 4w_1}{5 - 4w_1}.$$

Это преобразование отобразит областьI_1 на плоскость $\overline{C}_w$ с разрезом по лучу$[0,+\infty]$ (см. рис.8).

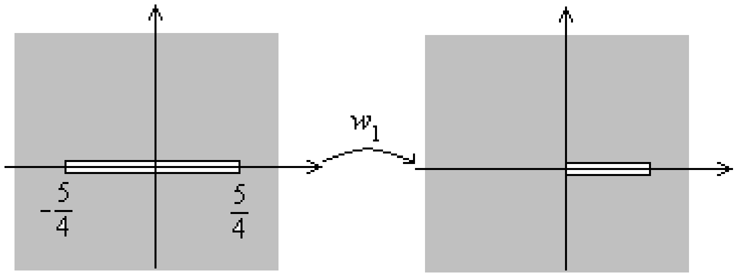


Рис.8

В самом деле, функция $w(x)=\dfrac{5+4x}{5-4x}$ имеет положительную производную $w'(x)=40(5-4x)^{-2}$ на промежутке $\left[-\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right]$. Значит, на этом промежутке она возрастает.

При $x=-\dfrac{5}{4}$, $w=0$, а при $x\to\dfrac{5}{4}$, $w\to+\infty$. Отсюда следует, что отрезок $\left[-\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right]$ отобразится на луч $[0,+\infty]$.

Рассмотрев суперпозицию этих двух отображений, получим, что функция

$$w=\frac{5+4\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}{5-4\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}=\frac{2z^2+5z+2}{-2z^2+5z-2}$$

искомая.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти образы следующих областей при отображении функцией $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$**:** **(**$w=u+iv$**):**

а) $\left\{z:|z|<\frac{1}{2}\right\}$**;**

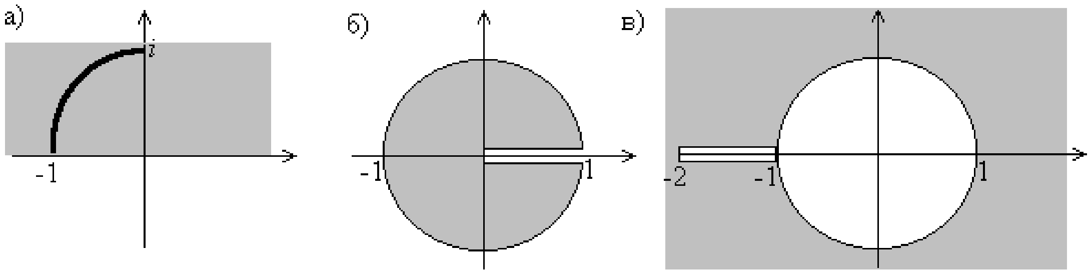
б) $\left\{z:|z|<1, z\notin[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$**;**

в) $\{z:|z|>1, \operatorname{Im}z\langle 0, z\notin[-2i,-i]\}$**;**

Ответ: а) $\left\{w:\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1\right\}$**;** **б)** $\left\{w:w\notin\left[-\infty,\frac{5}{4}\right]\right\}$**;**

в) $\left\{w:\operatorname{Im}<0, w\notin\left[-\frac{3}{4}i,0\right]\right\}$**.**

2. Найти какие-либо функции $w=w(z)$**, осуществляющие конформные отображения следующих областей на плоскость с разрезом по лучу** $[0,+\infty]$**:**



Ответ: а) $w=\frac{z^2+1}{(z-1)^2}$**; б)** $w=\frac{(z+1)^2}{2z}$**; в)** $w=\frac{2z^2+5z+2}{(-z-1)^2}$**.**

§ 4. Степенная функция

Будем предполагать известным определением степенной функции (см., например, [1], стр. 171-175, [2], стр. 123-126)

Отметим только, что здесь всюду под функцией $w = z^\alpha$, $\alpha > 0$, будем понимать функцию вида

$$w = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \qquad (4)$$

определенную в угле $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$.

Перечислим свойства функции $w = z^\alpha$. Доказательства этих свойств можно найти в упомянутых выше книгах [1] и [2].

1^0. Функция (4) однолистная внутри угла $\left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{\alpha}\right\}$;

2^0. Функция $w = z^\alpha$ отображает луч $\{z : 0 < \arg z < \gamma\}$, $0 < \gamma < \dfrac{2\pi}{\alpha}$, на луч $\{w : \arg w = \alpha\gamma\}$;

3^0. Степенная функция конформно отображает:

а) сектор $\{z : |z| < r, 0 < \arg z < \beta\}$, где $0 < \beta \le \dfrac{2\pi}{\alpha}$, на сектор $\{w : |w| < r^\alpha, 0 < \arg w < \alpha\beta\}$ (см. рис. 9).

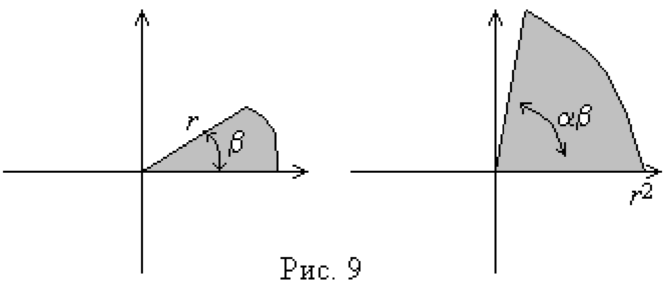


Рис. 9

б) угол $\{z : 0 < \arg z < \beta\}$, $0 < \beta \le \dfrac{2\pi}{\alpha}$, на угол $\{z : 0 < \arg z < \beta\}$ (см. рис. 10).

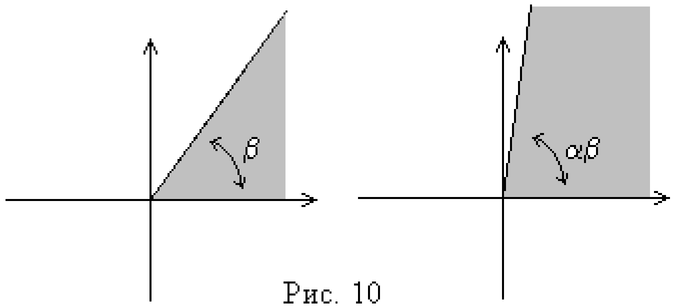


Рис. 10

Так, например, функция $w = z^2$ конформно отображает первый квадрат $\left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$ (см. рис.11),

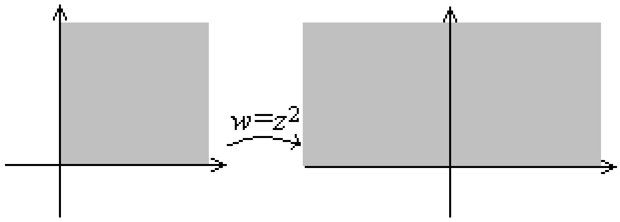


Рис. 11

а верхнюю полуплоскость $\{z : 0 < \arg z < \pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу $\{w : 0 < \arg z < 2\pi\}$ (см. рис.12).

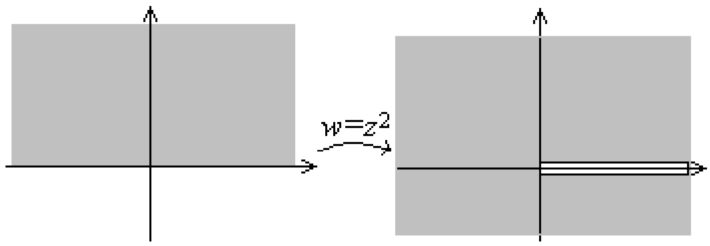


Рис. 12

Функция $w = \sqrt{z}$ конформно отображает плоскость с разрезом по лучу $[0,+\infty]$, т.е. область $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$ на верхнюю полуплоскость (см. рис.13).

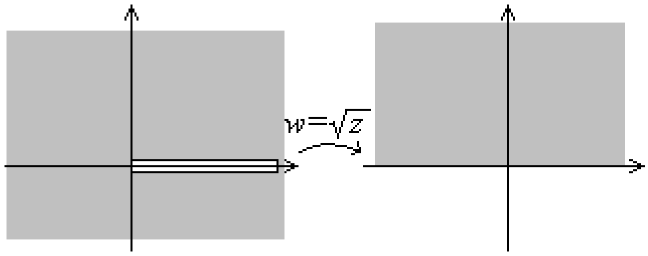


Рис. 13

Рассмотрим типичные задачи

Задача 1. Конформно отобразить полукруг $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

Первое решение. Известно (см. §3, свойство 4^0 б)), что функция Жуковского $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает данный в задаче полукруг на нижнюю полуплоскость $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 < 0\}$.

Далее, отображение $w = -w_1$ переводит нижнюю полуплоскость в верхнюю $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$. Суперпозиция этих двух отображений, т.е. функция $w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, осуществляет искомое отображение.

Второе решение. Заметим сначала, что граница данного полукруга естественным образом разбивается на два контура (см. рис.14):

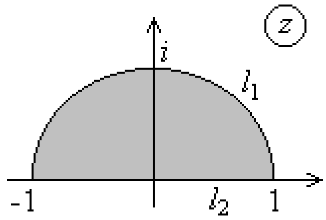


Рис. 14

Полуокружность $l_1 = \{z : |z| < 1, 0 \le \arg z \le \pi\}$ и отрезок $l_2 = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in [-1,1]\}$.

Легко видеть, что в точках $z = \pm 1$ контуры l_1 и l_2 взаимно ортогональны.

Дробно-линейная функция

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z}$$

отображает: 1) точку $z=-1$ в точку $w_1=0$, а точку $z=1$ в точку $w_1=\infty$;

2) вещественную ось плоскости $\overline{C}_z$ на вещественную ось плоскости $\overline{C}_{w_1}$.

В силу конформности и кругового свойства контуры l_1 и l_2 функцией w_1 отобразятся на лучи L_1 и L_2 соответственно, исходящие из начала координат, соединяющие точки 0 и ∞, и взаимно ортогональные в начале координат (см. рис.15), причем луч L_2 лежит на вещественной оси.

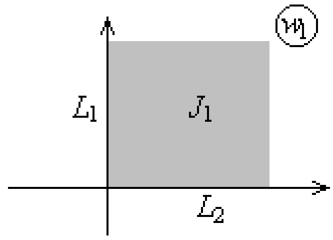


Рис.15

Поскольку $w_1(0)=1$, а $w_1(i)=i$, то $L_1=\left\{w_1 : \arg w_1 = \frac{\pi}{2}\right\}$, а

$L_2=\{w_1 : \arg w_1 = 0\}$ (при непрерывном отображении связное множество переходит в связное). Лучи L_1 и L_2 разбивают плоскость $\overline{C}_{w_1}$ на две области $I_1=\left\{w_1 : 0<\arg w_1 < \frac{\pi}{2}\right\}$ и $I_2=\left\{w_1 : \frac{\pi}{2}<\arg w_1 < 2\pi\right\}$. Исходная область (полукруг) отобразится либо на I_1, либо- на I_2. Так как $w_1\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{3+4i}{5}$, то полукруг отобразится на I_1 (необходимо конформно).

Далее, отображение $w=w_1^2$ (см. рис.11) конформно отобразит I_1 на верхнюю полуплоскость $\{w : 0<\arg w<\pi\}$.

Беря суперпозицию этих двух отображений, получаем, что отображение $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ является искомым.

Замечание. Первое решение более простое, однако, второе демонстрирует общий метод, который применяется при отображении круговых луночек на верхнюю полуплоскость.

Круговой луночкой называют область на плоскости, граница которой состоит из двух дуг окружностей.

Упомянутый выше метод состоит в том, что подбирают дробно-линейное отображение, которое одну из общих для граничных дуг точек переводит в бесконечность, а другую - в начало координат. При этом круговая луночка отображается на некоторый угол с вершиной в начале координат. Далее, полученный угол с помощью функции $w = z^{\alpha}$ "разворачивают" до угла раствора. И, наконец, применяя поворот плоскости, отображают этот угол на верхнюю полуплоскость.

Задача 2. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку $I = \{z : |z| < 1, |z - i| > 1\}$.

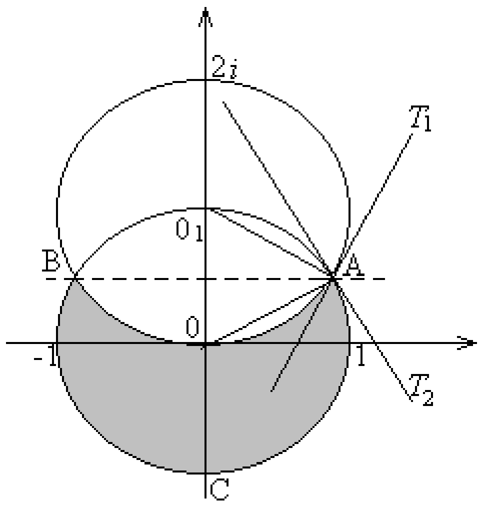


Рис. 16

Решение. Граница области I состоит из двух дуг окружностей $l_1 = BOA$ и $l_2 = BCA$. Заметим, что длины отрезков O_1A, OO_1 и OA равны 1. Отсюда следует, что угол $O_1AO = \frac{\pi}{3}$, а потому угол между касательными T_1 и T_2 к контурам l_1 и l_2 соответственно в точке A равен также $\frac{\pi}{3}$.

Кроме того, прямая BA делит отрезок OO_1 пополам, поэтому ординаты точек A и B равны $\frac{1}{2}$. Если $z_A(z_B)$- комплексное число соответствующее точке $A(B)$, то $z_A = x + \frac{i}{2}$ и, в силу условия задачи, $\left|x + \frac{i}{2}\right| = 1$. Отсюда $x^2 + \frac{1}{4} = 1$ и $x^2 = \frac{3}{4}$. Из чертежа видно, что $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, а $z_B = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

отметим еще что угол между касательной T_1 и прямой $l = \left\{ z : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \right\}$, проходящей через точки A и B равен $\frac{\pi}{3}$.

Рассмотрим дробно – линейную функцию

$$w_1 = \frac{z - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)}{z + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)}.$$

Имеем
$$w_1(z_A) = w_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0$$

$$w_1(z_B) = w_1\left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \infty$$

$$w_1\left(x + \frac{i}{2}\right) = \frac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}}$$ - вещественное число.

Таким образом, точки z_A и z_B функцией w_1 отображаются, соответственно в точки 0 и ∞, а прямая l в вещественную ось плоскости $\overline{C}_{w_1}$.

Рассуждая так же, как и в задаче 1, получаем, что контуры l_1 и l_2 отображаются в лучи Δ_1 и Δ_2, исходящие из начала координат. Угол между этими лучами равен $\frac{\pi}{3}$. Так как точка $z = 0$ принадлежит дуге l_1 и $w_1(0) = 1 + i\sqrt{3}$, то луч Δ_1 лежит в первом квадрате и наклонен к вещественной оси под углом $\frac{\pi}{3}$. Прямая l, не принадлежащая луночке переходит в вещественную ось. Значит, луночка I функцией w_1 отображается на угол $I_1 = \left\{ w_1 : \frac{\pi}{3} < \arg w_1 < \frac{2\pi}{3} \right\}$ (см. рис. 17).

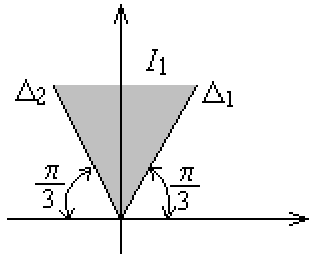


Рис.17

Преобразование $w_2 = e^{-\frac{\pi i}{3}} w_1$ переводит угол I_1 на угол $I_2 = \left\{ w_2 : 0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{3} \right\}$ (см. рис.18).

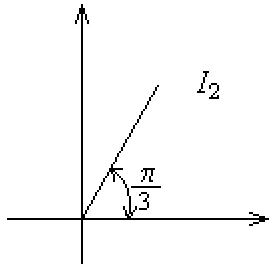


Рис. 18

Согласно свойству 3^0 б) функция $w = w_2^3$ отобразит I_2 на верхнюю полуплоскость. Беря суперпозицию этих трех отображений, получим, что искомое отображение осуществляется функцией

$$w = -\left(\frac{2z - \left(\sqrt{3} + i\right)}{2z + \left(\sqrt{3} - i\right)} \right)^3$$

Задача 3. Область $I = \{z : z \notin [-1,1]\}$ (плоскость с разрезом по отрезку $[-1,1]$) отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.

Решение. Дробно-линейная функция

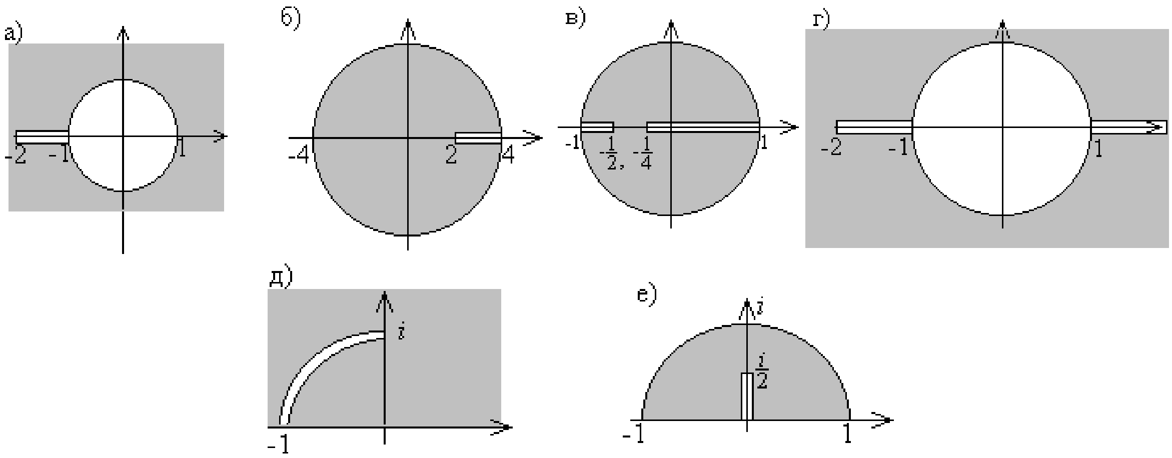
$$w_1 = \frac{1+z}{1-z}$$

переводящая точки -1, 0, 1 соответственно в точки 0, 1, ∞, отобразит отрезок $[-1,1]$ на луч $[0,+\infty]$. При этом сама область I отобразится на плоскость $\overline{C}_{w_1}$ с разрезом по лучу $[0,+\infty]$. Функция $w=\sqrt{w_1}$ конформно отображает полученную область на верхнюю полуплоскость. Итак, искомое отображение имеет вид

$$w=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. **Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость следующие области:**



Указание. Применить сначала функцию Жуковского.

Ответ: а) $w=\sqrt{\dfrac{2z^2+5z+2}{-z^2+2z-1}}$; б) $w=\dfrac{-(z+4)}{\sqrt{-z^2+10z-16}}$;

в) $w=\sqrt{\dfrac{4z^2+10z+4}{4z^2+17z+4}}$; г) $w=\sqrt{\dfrac{2z^2+5z+2}{z}}$;

д) $w=\dfrac{-\sqrt{z^2+1}}{z-1}$; е) $w=\sqrt{\dfrac{z^4+17z^2+4}{\left(1+z^2\right)^2}}$.

2. **Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку**

$$\left\{z:|z|>2;\left|z-\sqrt{2}\right|<\sqrt{2}\right\}$$

Ответ: $w=\left(\dfrac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right)^4$.

3. **Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость область**

$$I=\{z:|z|>1;|z-i|>1\}$$

Ответ: $w=i\left(\dfrac{2z-\sqrt{3}-i}{2z+\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$.

§ 5. Функция $w = e^z$

Будем предполагать известным определение e^z (см. [1], стр. 43, [2], стр.90-92).

Перечислим ее основные свойства.

1^0. Функция $w = e^z$ отображает (однолистно) прямую $\{z : \operatorname{Im} z = b\}$ на луч $\{w : \arg w = b\}$.

2^0 Функция $w = e^z$ однолистна в любой области, не содержащей никакой пары точек z_1 и z_2, связанных соотношением: $z_1 - z_2 = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3^0 Функция $w = e^z$ конформно отображает:

а) полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу $\{w : 0 < \arg w < 2\pi\}$(см. рис.19):

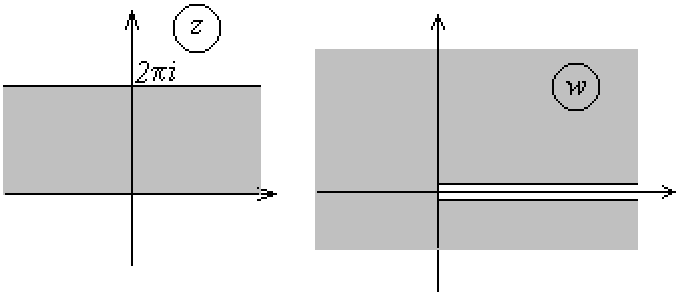


Рис. 19

б) полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (см. рис.20):

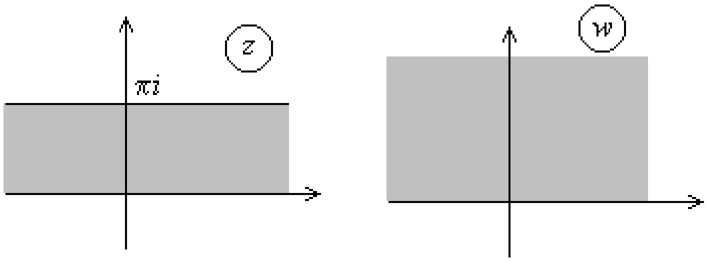


Рис. 20

в) левую полуполосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z < 0\}$ на единичный круг с разрезом по отрезку $[0,1]$:

$\{w: |w| < 1, 0 < \arg w < 2\pi\}$ (см. рис.21):

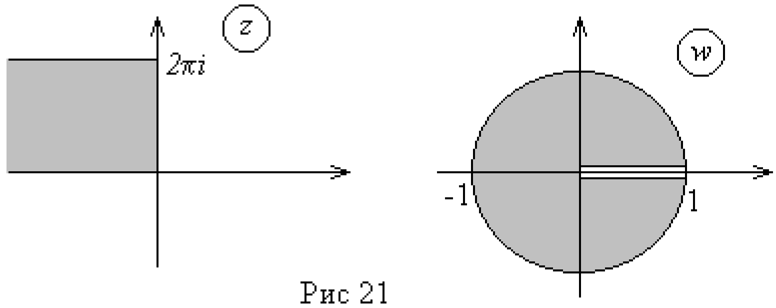


Рис 21

г) левую полуполосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0\}$ на единичный полукруг, лежащий в верхней полуплоскости, $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ (см. рис.22):

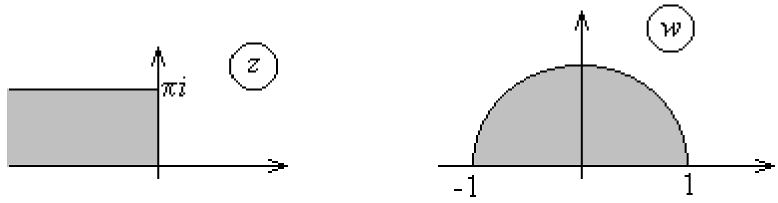


Рис 22

Рассмотрим типичные задачи.

Задача 1. Отобразить конформно круговую луночку $\{z: |z-i| > 1,\ |z-2i| < 2\} = I$ на верхнюю полуплоскость.

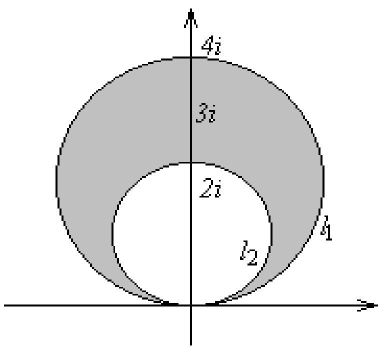


Рис. 23

Решение. Граница области I состоит из двух окружностей $l_1 = \{z : |z - i| = 1\}$ и $l_2 = \{z : |z - 2i| = 2\}$, имеющих общую точку $z = 0$. В точках $z = 2i$ и $z = 4i$ контуры l_1 и l_2 ортогональны мнимой оси. Д.л.ф. $w_1 = \frac{1}{z}$ переводит точку $z = 0$ в точку $w_1 = \infty$, мнимую ось плоскости $\overline{C}_z$ в мнимую ось плоскости $\overline{C}_{w_1}$, а окружности l_1 и l_2 в прямые T_1 и T_2, ортогональные мнимой оси и проходящие через точки $w_1(2i) = -\frac{i}{2}$ и $w_1(4i) = -\frac{i}{4}$. Так как $w_1(3i) = -\frac{i}{3}$, то область I функцией $\frac{1}{z}$ отобразится в полосу $I_1 = \left\{ w_1 : -\frac{1}{4} < \operatorname{Im} w_1 < -\frac{1}{2} \right\}$ (см. рис.24).

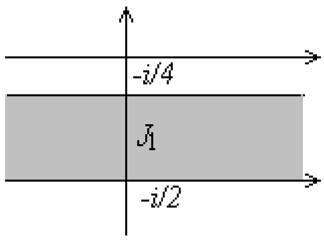


Рис. 24

Функция $w_2 = -4\pi\left(w_1 + \frac{i}{4}\right)$ производящая сдвиг, поворот и растяжение, переводит полосу I_1 в стандартную полосу $I_2 = \{w_2 : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi\}$ (см. рис.25).

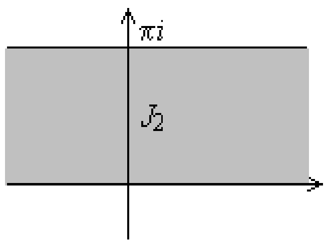


Рис. 25

Функция $w = e^{w_2}$ отображает эту полосу на верхнюю эту полосу на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$ (см. рис.20)

Суперпозиция последовательных преобразований дает искомую функцию:

$$w = e^{-4\pi\left(\frac{1}{z}+\frac{i}{4}\right)} = e^{-\frac{4\pi}{z}}.$$

Задача 2. Полуполосу $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$ с разрезом вдоль отрезка $\{z : z = \pi + iy, 0 < y \le 2\}$ отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.

Решение. Обозначим данную область через *I* (см. рис.26).

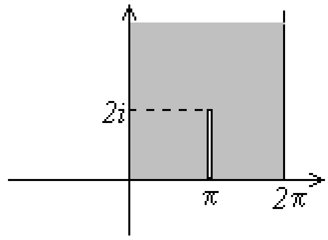


Рис. 26

Отображение $w_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} z$ переводит *I* в область I_1 - полуполосу $\{w_1 : 0 < \operatorname{Im} w_1 < 2\pi, \operatorname{Re} w_1 < 0\}$ с разрезом по отрезку $\{w_1 : w_1 = x + \pi i, -2 < x < 0\}$ (см. рис.27).

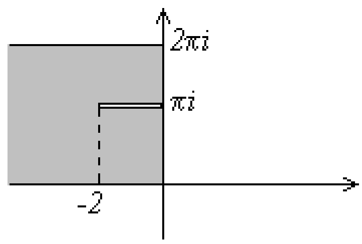


Рис. 27

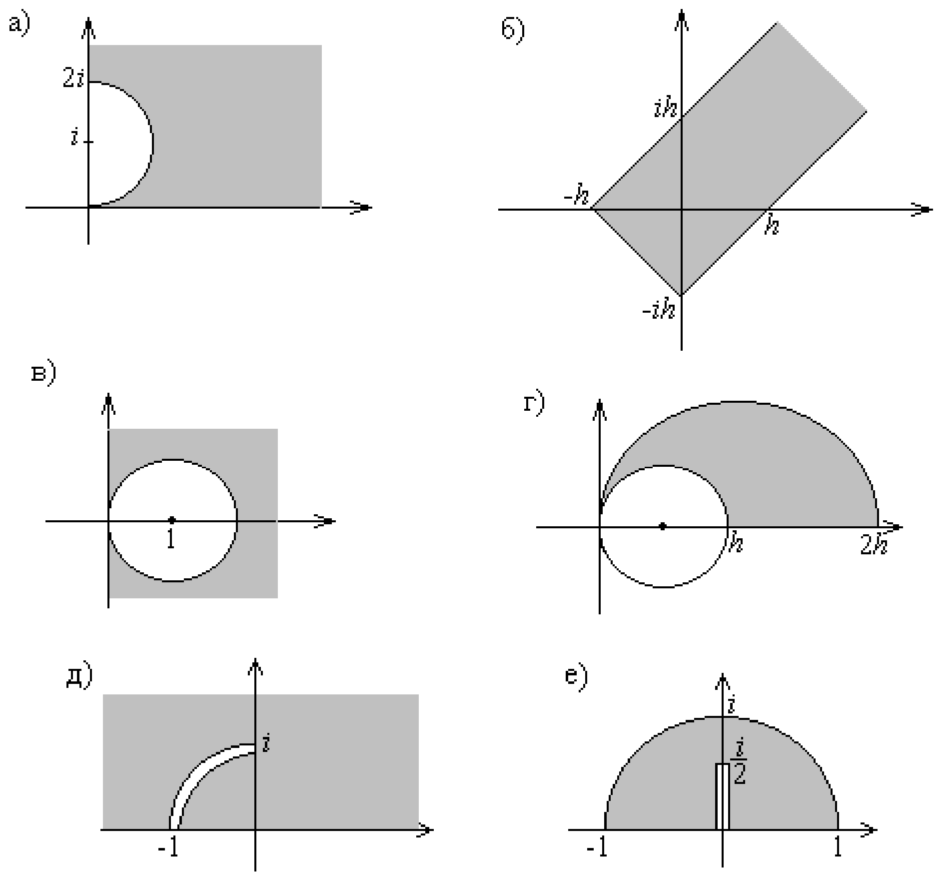
Применим отображение $w_2 = e^{w_1}$. Согласно свойству 3^0 в) (см. рис.21), сама полуполоса перейдет в круг $\{w_2 : |w_2| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0,1)$, а разрез, как нетрудно видеть, переходит в отрезок $\left(-1, e^{-2}\right]$. Итак, при отображении $w_2 = e^{w_1}$ область I_1 перейдет в область $I_2 = \left\{w_2 : |w_2| < 1,\ \ w_2 \notin \left(-1, e^{-2}\right] \cup [0,1)\right\}$. Отображение областей вида I_2 уже было рассмотрено в §3: функция Жуковского $w_3 = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ отображает область I_2 на область I_3-плоскость $\overline{C}_{w_3}$ с разрезом по лучу $[c, +\infty]$, где $c = \frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{2}\right) = ch2$. Наконец, функция

$w=\sqrt{w_3-ch2}$ отображает I_3 на верхнюю полуплоскость. Суперпозиция рассмотренных отображений дает решение задачи:

$$w=\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^{w_1}+e^{-w_1}\right)-ch2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)-ch2}=\sqrt{\cos z-ch2}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. **Отобразить конформно следующие области на верхнюю полуплоскость**:



Ответ: **а)** $w=\sqrt{\frac{1}{2}e^{-\frac{4\pi}{2}}+e^{\frac{4\pi}{2}}+1}=-\sqrt{2}ch\frac{2\pi}{z}$**;**

б) $w=\sqrt{-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi(-z+iz-h)}{h}}+e^{-\frac{\pi(-z+(z-h))}{h}}\right)-2}=\sqrt{2}ish\left(\frac{\pi}{h}z-iz+h\right)$**;**

в) $w=e^{\frac{2\pi i}{z}}$ **;**

г) $w=\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{4\pi ih}{z}}+e^{\frac{4\pi ih}{z}}\right)+1}=\sqrt{2}\cos\frac{2\pi h}{z}$**;**

д) $w=\sqrt{\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}}}$ **;** **е)** $w=\sqrt{\frac{e^{z}+1}{e^{z}+e^{-\pi}}}$ **.**

Литература

1. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Том 4, часть 3, ISBN 978-5-397-00687-3; 2009 г.

2. Боярчук А.К.. Справочное пособие по высшей математике. Том 4, ФКП, ISBN 5-354-00020-3, 5-354-00682-1; 2004 г.

3.Курант Р. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - ISBN 978-5-382-00751-9; 2008 г.

4.Курант Р. Геометрическая теория функций комплексного переменного.- ISBN 978-5-458-29330-3; 2012 г.

5.Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. ISBN 5-9511-0014-3; 2002 г.

6.Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. ISBN 978-5-03-003553-6; 2009 г.

2. Шабунин М. И., Сидоров Б. В., Федорюк М. В. Теория функций комплексного переменного. ISBN 978-5-94774-005-9, 5-94774-005-2; 2009 г.

4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. ISBN 978-5-9710-1357-0; 2015 г.