МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ З.О.Батыгов
____ 05 ____ 2018 г.

Учебное пособие

Теория пределов

для студентов физико-математических специальностей

Напрвление подготовки 01.03.01 – Математика

Программа *академический бакалавриат*

Квалификация *бакалавр*

Форма обучения *очная*

Факультет *физико-математический*

Кафедра *Математический анализ*

Магас 2018

УДК 517

Составитель: Ф.Д. Кодзоева

Методическое пособие по теории пределов для студентов 1 курса физико-математических специальностей.

Данное методическое пособие является руководством при выполнении контрольных заданий по математическому анализу студентами 1 курса физико-математических специальностей.

Методическое пособие рассмотрено на заседании УМС ИнгГУ
от 28.02.2018 г. протокол № 6

Рецензенты: Султыгов М.Д., профессор, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ» ИнгГУ

1. Предел числовой последовательности.

Числовой последовательностью называют правило, по которому каждому натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ ставится в соответствие действительное (комплексное) число $x_n \in \mathbf{R}$ $\quad (z_n \in \mathbf{C})$. Последовательность обозначают символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$). Можно сказать, что последовательность является функцией $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ($f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$). Очевидным образом определяются сумма, произведение, частное двух последовательностей. В этом разделе мы будем иметь дело лишь с последовательностями действительных чисел.

Число $a \in \mathbf{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0 \in \mathbf{N}$ такой, что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c\, x_n = c\, a$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,
4) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = a/b$ при ($y_n \neq 0, b \neq 0$).

Пример 1. Дана последовательность $x_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. а) Найдите $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; б) найдите n_0 такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 0{,}001$.

Решение. а) Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1-1)-1}{n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{3}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{3}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 2 - 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} =$$

$2 - 3 \cdot 0 = 2$.

б) Найдём требуемое n_0. Из проделанных выше выкладок следует, что n_0 должно быть подобрано так, чтобы для всех $n > n_0$

$$\left| 2 - \frac{3}{n+1} - 2 \right| < 0{,}001 \text{ или } \frac{3}{n+1} < \frac{1}{1000};$$

отсюда следует $n+1>3000$, $n>2999$. Следовательно, можно взять $n_0=2998$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если для любого $A>0$ найдётся номер n_0 такой, что для любого $n>n_0$ справедливо неравенство $|x_n|>A$; записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Если при этом x_n, начиная с некоторого номера, сохраняют положительный (отрицательный) знак, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Важную роль играет последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Доказывается, что эта последовательность сходится, и ее предел обозначается буквой e; e $\approx 2{,}718$.

2. Элементарные функции.

К элементарным функциям относятся:

1) простейшие элементарные функции: постоянная c, степенная x^{α}, показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрическая $\cos x$, обратные тригонометрические $arc\cos x,\ arc\,tg\, x$;

2) все функции, получающиеся из простейших элементарных функций путем применения конечного числа следующих четырех операции: сложение, умножение, деление, суперпозиция функций (сложная функция).

Пример 2. В класс элементарных функций попадают: а) многочлен; б) рациональная дробь (отношение двух многочленов); в) $\sin x$, т.к. $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$; г) $tg\, x = \dfrac{\cos(\pi/2-x)}{\cos x}$; д) $arc\sin x$, т.к. $arc\sin x = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arccos} x$, и множество других.

3. Предел функции.

Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках интервала (a,b), за исключением, быть может, точки $x_0\in(a,b)$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Можно дать другое, равносильное приведенному, определение: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a;b)$, сходящейся к x_0, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Если $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$,то число А называется *пределом* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > a$,такое, что неравенство $x > b$ влечет за собой неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ или $f(+\infty) = A$. Аналогично определяется $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Число А называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 слева (справа) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ или $f(x_0-0)$($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, или $f(x_0+0) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$) справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Число А является пределом $f(x)$ в точке x_0, если совпадают пределы $f(x)$ в этой точке слева и справа: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Если функция $f(x)$ определена в интервале $(a; x_0)$ (в интервале $(x_0; b)$) и для любого М существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) > M$, то говорят, что левый (правый) предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $+\infty$, и при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 - 0) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$, или $f(x_0 + 0) = +\infty$). Аналогично определяются $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$.

Предел функции обладает теми же свойствами, что и предел последовательности: если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot A$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
4) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = A/B$

(последнее при $g(x) \neq 0,\ B \neq 0$). То же верно для односторонних пределов.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to3}(2x-1) = 5$. По данному $\varepsilon = 0{,}01$ найти $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - 3| < \delta$ следует $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Неравенство $|f(x) - 5| =$ $= |2x - 1 - 5| = 2|x - 3| < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x - 3| < \varepsilon/2$. Поэтому, если по данному $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \varepsilon/2$, то из неравенства $|x - 3| = \delta = \varepsilon/2$ будет следовать неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to3} \mathrm{f}(x) = 5$. В частности, для $\varepsilon = 0{,}01$ достаточно взять $\delta = 0{,}005$.

Пример 4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}\right).$$

Решение. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{3+0+0}=\frac{2}{3}.$$

Имеют место равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

называемые первым и вторым замечательными пределами.

4. Непрерывность функции.

Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Другими словами, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполнены два условия:

1) $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0,
2) бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$ отвечает бесконечно малое приращение функции $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *в том и только том случае,* если

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке числового множества X, то говорят, что $f(x)$ непрерывна на множестве X .

Сумма, произведение, частное (при неравенстве нулю знаменателя), суперпозиция непрерывных функций также являются непрерывными функциями.

Функция $f(x)$ терпит разрыв в точке x_0 в одном из следующих случаев:

1) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, но $f(x_0) \neq A$, либо $f(x_0)$ не определено (рис.1); в этом случае говорят, что x_0 – точка устранимого разрыва;

2) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, – конечные, но не равные между собой пределы; такая точка называется точкой разрыва первого рода (говорят, что $f(x)$ терпит в точке x_0 скачок) (рис.2);

3) по крайней мере, одного из односторонних пределов $f(x)$ в точке x_0 не существует (т.е. не существует конечного предела); в таком случае говорят, что x_0 – точка разрыва второго рода (рис.3).

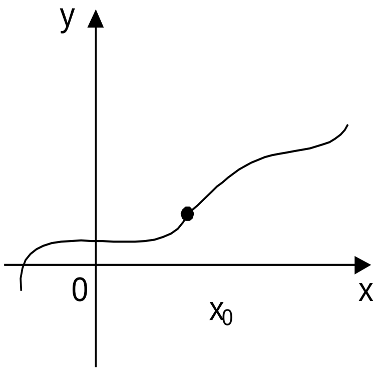

Рис.1

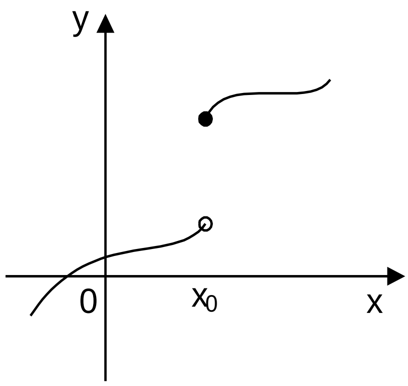

Рис.2

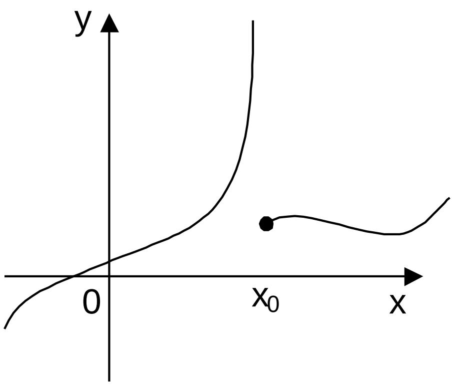

Рис.3

Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } & x \leq -1, \\ x^2, \text{ если } & -1 < x \leq 2, \\ \sin\dfrac{\pi x}{4}, \text{если } & x > 2 \end{cases}$$

и построить её график.

Решение. Аналитические выражения $(-x)$, x^2, $\sin\dfrac{\pi x}{4}$, входящие в определение $f(x)$, задают непрерывные элементарные функции. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна всюду, кроме, может быть, точек «склейки» $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек.

а) $x = -1$.

$f(-1-0) = \lim\limits_{x \to -1-0} (-x) = -(-1) = 1$,

$f(-1+0) = \lim\limits_{x \to -1+0} x^2 = (-1)^2 = 1$,

$f(-1) = -(-1) = 1$.

Так как $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1) = 1$, то функция непрерывна в точке x = –1.

б) $x = 2$.

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} x^2 = 2^2 = 4$,

$f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} \sin\frac{\pi x}{4} = \sin\frac{\pi \cdot 2}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$f(2) = 2^2 = 4$.

Так как $f(2-0) = f(2) = 4 \ne f(2+0) = 1$, то $f(x)$ в точке $x = 2$ терпит разрыв первого рода.

Сделаем чертёж.

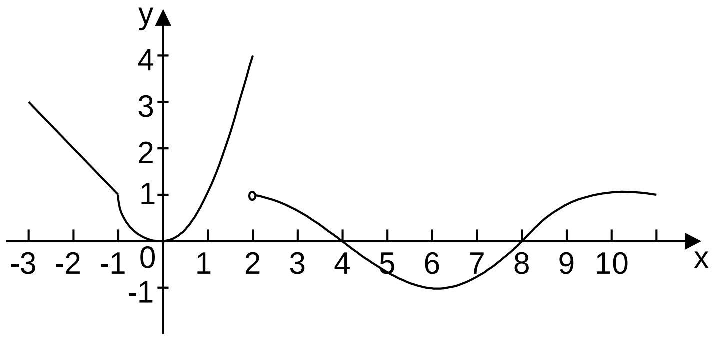

Рис.4

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}$. Сделать эскиз графика.

Решение. Функция является элементарной, поэтому непрерывна во всех точках, кроме точек $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, в которых она не определена. Найдём характер разрыва в этих точках.

а) $x = -1$.

$$f(-1-0) = \lim_{x \to -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \lim_{x \to -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-1-0)^2(-1-0-1)(-1-0+1)}} = 2^{\frac{1}{1\cdot(-2)\cdot(-0)}} = 2^{\frac{1}{+0}} = \\ = 2^{+\infty} = +\infty \end{array} \right] = +\infty;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \to -1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-1+0)^2(-1+0-1)(-1+0+1)}} = 2^{\frac{1}{1\cdot(-2)\cdot(+0)}} = 2^{\frac{1}{-0}} = \\ = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = +0 \end{array}\right] = +0$$

(+0 означает, что $f(x)$ стремится к 0, оставаясь больше 0).
Так как $f(-1-0)=+\infty$, $f(-1+0)=0$, то $f(x)$ в точке $x=-1$ терпит разрыв второго рода.
б) $x=0$.

$$f(-0)=\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-0)^2(-0-1)(-0+1)}} = 2^{\frac{1}{\cdot(+0)(-1)(+1)}} = 2^{\frac{1}{-0}} = \\ = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = +0 \end{array}\right] = +0;$$

$$f(+0)=\lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(+0)^2(+0-1)(+0+1)}} = 2^{\frac{1}{\cdot(+0)(-1)(+1)}} = 2^{\frac{1}{-0}} = \\ = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = +0 \end{array}\right] = +0 \ .$$

Видим, что $f(-0)=f(+0)=0$, но $f(0)$ не определена, следовательно, $x=0$ является точкой устранимого разрыва.
в) $x=1$.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(1-0)^2(1-0-1)(1-0+1)}} = 2^{\frac{1}{1\cdot(-0)\cdot 2}} = 2^{\frac{1}{-0}} = \\ = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = +0 \end{array}\right] = +0;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(1+0)^2(1+0-1)(1+0+1)}} = 2^{\frac{1}{1\cdot(2)\cdot(+0)}} = 2^{\frac{1}{+0}} = \\ = 2^{+\infty} = +\infty \end{array}\right] = +\infty.$$

Так как $f(1-0)=+0$, $f(1+0)=+\infty$, то $x=1$ является точкой разрыва второго рода.
Для построения эскиза графика исследуем поведение функции при

$x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-\infty)^2((-\infty)^2-1)}} = 2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = \\ = 2^{+0} = 1+0 \end{array}\right] = 1+0,$$

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(+\infty)^2((+\infty)^2-1)}} = 2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = \\ = 2^{+0} = 1+0 \end{array}\right] = 1+0$$

(выражение (1+0) означает, что $f(x)$ стремится к 1, оставаясь больше 1). Опираясь на полученные данные, сделаем эскиз графика (рис. 5).

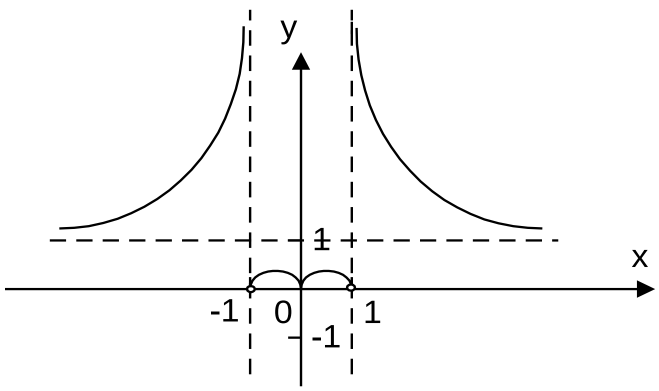

Рис. 5

5. Бесконечно малые величины и их сравнение.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной (б. м.в.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha(x)/\beta(x)) = C$; тогда

а) если $C \neq 0$, $C \neq \infty$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются б.м.в. одного порядка;

при С = 1 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.в. и при этом пишут $\alpha(x)$ ~ $\beta(x)$;

б) если С = 0, то $\alpha(x)$ называется б.м.в. более высокого порядка чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

При $x \to 0$ справедливы следующие соотношения, вытекающие из первого и второго замечательных пределов и непрерывности элементарных функций:

$$\sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \quad (1+x)^p - 1 \sim px, \quad p > 0.$$

Эти соотношения используют для раскрытия неопределённостей.

Пример 7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{9x^2}\cdot\left(-\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{4x^2}}.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{1-\sin 2x}-1=(1-\sin 2x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-\sin 2x)\sim\frac{1}{2}\cdot(-2x)=-x,$$

$$e^{arctg^2 3x}-1\sim(arctg 3x)^2\sim(3x)^2=9x^2,$$

$$1-\cos 2x\sim\frac{(2x)^2}{2}=2x^2,\ \lim_{x\to 0}e^{\frac{9x^2}{8x^2}}=e^{-\frac{9}{8}}.$$

Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\cdot\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)\cdot 9x^2}{2x^2\cdot 5x}=-\frac{9}{10}.$$

Пример 8. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2-1}+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}\cdot\frac{3x^2}{2x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}}\right)^{\frac{3x^2}{2x^2-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\left(1+\dfrac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}}\to e\\ \text{при x}\to\infty\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x^2}{2x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x^2}{x^2\left(2-1/x^2\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2-1/x^2}}=x_n=\frac{6n+1}{-n-3}=x_n=\frac{-2n+5}{n+1}.$$

Пример 9. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{ctg 4x^2}.$$

Решение. Имеем $\cos 3x=1-(1-\cos 3x)\sim 1-\frac{(3x)^2}{2}=1-\frac{9x^2}{2}$,

$ctg 4x^2=\frac{1}{tg 4x^2}\sim\frac{1}{4x^2}$. Отсюда находим $\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{ctg 4x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)^{\frac{1}{4x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{9x^2}\cdot\left(-\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{4x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{9x^2}}\right)^{-\frac{9x^2}{2}\cdot\frac{1}{4x^2}}=\left[\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{9x^2}}\to e\ \text{при x}\to 0\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{9x^2}{8x^2}} = e^{-\frac{9}{8}}.$$

Задание 1.

Доказать, пользуясь определением, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Пример решения задачи: $x_n =$ (n+1)/(n+2)

Нужно доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N \Rightarrow \quad |x_n - 1| < \varepsilon \qquad (1)$$

$\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$, когда $n > 1/\varepsilon$ -2 , возьмем за N=[1/ε -2] , тогда (1) выполняется.

Варианты:

1.1 $x_n = \frac{n+1}{1-2n}$ a=-1/2

1.2 $x_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$ a=-3/5

1.3 $x_n = \frac{4n+3}{2n-4}$ a=2

1.4 $x_n = \frac{8-4n^2}{10+16n^2}$ a=-1/4

1.5 $x_n = \frac{3n^2}{2-n^2}$ a=3

1.6 $x_n = \frac{8n-1}{4n+2}$ a=2

1.7 $x_n = \frac{5n+1}{10n-2}$ a=1/2

1.8 $x_n = \frac{5-2n^2}{n^2+3}$ a=-2/3

1.9 $x_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$ a=1/2

1.10 $x_n = \dfrac{8+n^2}{1-10n^2}$ a=-1/10

Задание 2.

Пользуясь определением предела функции, докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. По данному $\varepsilon = 0{,}01$ найдите $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < 0{,}01$.

№ п/п	$f(x)$	x_0	A	№ п/п	$f(x)$	x_0	A
1	7x-1	1	6	16	-2x+1	1	-1
2	9x+1	-1	-8	17	-3x-3	1	-6
3	3x+4	2	10	18	x-5	4	-1
4	5x+3	-2	-7	19	-3x+4	2	-2
5	8x-2	2	14	20	7x-2	2	12
6	x^2-9	2	-5	21	10x+1	1	11
7	6x-7	2	5	22	12x-5	2	19
8	$4x^2$-1	1	3	23	11x+3	-1	-8
9	-3x+5	-1	8	24	-6x+5	-1	11
10	8x-4	2	12	25	-x+7	1	6
11	4x-3	1	1	26	$-x^2$+1	1	0
12	x^2-1	1	0	27	$-x^2$-5	3	-14
13	x^2-4	3	5	28	3x-9	3	0
14	6x+1	1	7	29	2x+7	-1	5
15	-x+4	2	2	30	-4x+3	2	-5

Задание 3.

Вычислить пределы числовых последовательностей

Пример:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3/n^2}{1+5/n^2}=1$$

Варианты:

3.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$

3.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7+n)^2-(n+2)^2}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$

3.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$

3.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[2]{n^2+6}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt{n+1}}$

3.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

3.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

3.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n^2-\sqrt[4]{n^2+4}}$

3.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^3-(n+7)^3}{(5n+20)^3+(3n+1)^3}$

3.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[2]{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[4]{n^4+5}}$

3.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(71+n)^4-(3n+2)^4}{(31n+2)^4+(42n+1)^4}$

Задание 4.

Вычислить пределы числовых последовательностей

Пример:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1-n-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}=0$$

Варианты:

4.1 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})\sqrt{n}*n$

4.2 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})\sqrt{n}$

4.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$

4.4 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^3})$

4.5 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$

4.6 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$

4.7 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})\sqrt{n^3+8}$

4.8 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-8})\sqrt{n^3}$

4.9 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{3+n^3})*n^2$

4.10 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n-3})n$

Задание 5.

Вычислить пределы функций.

Пример: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}=$-2

Варианты:

5.1 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

5.2 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+5}$

5.3 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+x}$

5.4 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x^3-2x^2+2x+1}$

5.5 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

5.6 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

5.7 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

5.8 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

5.9 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^2-(3x+1)}{x^2+x^3}$

5.10 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

5.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-4x^3}{5+x^2+3x^3}$

5.12 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

5.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+3x^3+2}{4x^5+2x^3-3}$

5. 14 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-125}$

5. 15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x^4-5x^6}{4x+5x^2-6x^6}$

5. 16 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

5.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4x^2+5x^3}{4x-5x^2-3x^3}$

5. 18 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

5. 19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^6+3x^5}{4x^7+2x^5-4x^4}$

5. 20 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+27}$

5. 21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3x^2+4x^3}{2x^5-2x+5}$

5.22 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

5.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4+3x-7}{3x^3-6x^2+5}$

5. 24 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-2x}$

5. 25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x^2-7x^3}{5-2x^2+4x^3}$

5. 26 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}$

5. 27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{5}x}{5x^4-3x^2+6}$

5. 28 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+2}{x^2+2x}$

5. 29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt[6]{x^2}+3\sqrt[6]{x^3}}{5\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}}$

5. 30 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

5. 31 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+4x^6+x^5}{4x^8+2x^5-x^4}$

5. 32 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

5. 33 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt{x}}$

5. 34 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-5x-12}{x^3-64}$

5. 35 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4x^2-7x-15}{8x^3-64}$

5. 36 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x^3-1}$

5.37 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt[4]{x^5}+2\sqrt[4]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt{x}}$

5. 38 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+2x}$

5. 39 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^5}+4\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{x^5}-4\sqrt{x}+3}$

5. 40 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+7\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^4}}{5\sqrt[5]{x^3}+8\sqrt{x}}$

Задание 6.

Вычислить пределы функций.

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{5\sin 5x}=0.2*\lim_{x\to 0}\frac{y}{\sin y}=0.2$$

6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 5x}$

6.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

6.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{1-\cos x^2}$

6.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

6.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{(1-\cos x)^2}$

6.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

6.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{\cos 4x-\cos 5x}$

6.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

6.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 7x-\cos 8x}$

Задание 7.

Вычислить пределы функций.

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x(e^x-1)}=1$$

Варианты:

7.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

7.2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$

7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

7.4 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 3x+1}{\sin^2 7x}$

7.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$

7.6 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln(5-2x)}$

7.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$

7.8 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$

7.9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,4x}$

7.10 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{5}{x^3+1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{4}{x^3+27}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{4}{x-5}-\dfrac{1}{x^2-25}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{3}{x^2-16}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{7}{x-8}-\dfrac{5}{x^2-64}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-tg^2x\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{6}{x^2-16}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^4}{x^3-3}-\frac{x^2}{x-1}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{6}{x^2-16}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+5}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 6}\left(\frac{8}{x-6}-\frac{3}{x^2-36}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-4}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$

2. Вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg7x}{2x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 3x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3x}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg2x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{9x}{\sin 4x}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg5x}{tg6x}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} ctg5x \cdot x$
11. $\lim\limits_{x \to 0} 3x \cdot ctg \frac{x}{2}$
12. $\lim\limits_{x \to 0} tg3x \cdot ctg4x$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ctg2x}{ctg7x}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg4x}{tg8x}$
15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg5x}{tg6x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 3x}{5x^2}$
18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7x^3}{1-\cos^2 4x}$
19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{tg7x}$
20. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{tg^2 \frac{x}{3}}$
21. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg3x}{4x}$
22. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ctg6x}{ctg3x}$
23. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 2x}{5x}$
24. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7x^2}{\sin 3x}$
25. $\lim\limits_{x \to 0} tg5x \cdot ctg7x$
26. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{3x^2 \cdot ctg4x}$
27. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{tg5x}$
28. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{4}}{x^2}$
29. $\lim\limits_{x \to 0} ctg6x \cdot x^2$
30. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{1-\cos^2 3x}$

3. Найдите пределы, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-4}\right)^{x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x^2}{1-2x^2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{3}{x^2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+2}\right)^{\frac{x}{2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x^2}{1-2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+4x^2}{1+2x^2}\right)^{\frac{2+x}{x^2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}\right)^{\frac{2}{x^2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2}{3}}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x^2}{2+x^2}\right)^{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-2x^2}{3+x^2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+9}\right)^{\frac{x^2}{3}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x+1}{3x^2}}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{3x^2}{(x+1)}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x^2}{1-2x^2}\right)^{2x^2+1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+2x^2}{3-2x^2}\right)^{\frac{2-x}{x^2}}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2-2}{x^2-2}\right)^{\frac{2+x}{4x^2}}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-5}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^3}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x^2}{x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$;

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{x^2+1}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-3+2x}{1-4x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2-4}{3x^2-4}\right)^{\frac{2x-1}{2x^2}}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{1+x}{3x^2}}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x^2}{2+4x^2}\right)^{\frac{3-x}{2x^2}}$;

27) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{\frac{5x^2+1}{4x-1}}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}\right)^{\frac{x+3}{4x^2}}$.

4. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x}{\sin^2 x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 6x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\ln(1+x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 4x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{2x}-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(x+1)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\ln(1+x)}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg 3x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$
19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$
21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 3x}{ctg 4x}$
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$
24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(x+3)}$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{e^{3x}-1}$
26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-arctg 3x}{x^3+2x^2}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 5x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin 2x}{4x-\sin 3x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin x}-1}{x^2\cos x}$;

32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$;

33. $\lim\limits_{x\to 0+0}(\ln x+ctgx)$;

34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$;

35. $\lim\limits_{x\to +0}(tgx)^x$;

36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-e^x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin^2 x}{x^2e^x}$;

38. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-\ln x)$;

39. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$;

40. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$;

41. $\lim\limits_{x\to +0}(\ln x)^{\arcsin x}$;

42. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\ln(x+1)}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

45. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x\ln^2 x}{x+e^x}$;

46. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\sin \pi x}\right)$;

47. $\lim\limits_{x\to +0}(tgx)^{arctgx}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{x}\right)$;

49. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$;

50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

51. $\lim\limits_{x\to +0}(1-\sin x)^{ctgx}$;

52. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin^2 x}{x\ln(x+1)}$;

54. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{e^x-e}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{\sin 2x}}{x-\sin x}$;

56. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln 2x\right)$;

57. $\lim\limits_{x\to +0}(\ln x)^{arctgx}$;

58. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$;

59. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

61. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

62. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\sin\pi x}\right)$;

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}{xe^{x^2}}$;

64. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{x-\pi/2}\right)$;

65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{e^{x\sin x}-1}$;

66. $\lim\limits_{x\to 4+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{1}{tg\pi x}\right)$;

67. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin^2 x}{(x+a)\ln^2(x+1)}$;

68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{1}{e^x-e^{-x}}\right)$;

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln x-x^2}{e^x-\ln x+x^2}$;

70. $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\ln(x-2)+\frac{1}{x-2}\right)$;

71. $\lim\limits_{x\to +0}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{ctgx}$;

72. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

73. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

74. $\lim\limits_{x\to 5+0}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{e^x-e^5}\right)$;

75. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^2}$;

76. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x-\pi}\right)$;

78. $\lim\limits_{x\to +0}(arctgx)^x$;

79. $\lim\limits_{x\to -1+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x+1}\right)$;

80. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\ln(x+1)}$;

81. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$;

82. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\ln x}{3x^2-\ln^2 x}$;

83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{arctgx}\right)$;

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+x\right)}{\ln\left(x^2-x\right)}$;

85. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)$;

86. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)}{x\cos x}$;

87. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sin\pi x}\right)$;

88. $\lim\limits_{x\to +0}(1-\sin x)^{\ln x}$;

89. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$;

90. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$;

91. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

5. Для заданной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ найти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$**;**

б) n_0 **такое, что для всех** $n > n_0$ **выполняется неравенство** $|x_n - a| < 0{,}001$**.**

1) $x_n = \dfrac{3n+1}{-2n-1}$;

2) $x_n = \dfrac{6n+1}{-n-3}$;

3) $x_n = \dfrac{-2n+5}{n+1}$;

4) $x_n = \dfrac{4n-2}{-5n+3}$;

5) $x_n = \dfrac{n+2}{4n-1}$;

6) $x_n = \dfrac{-3n+4}{5n-2}$;

7) $x_n = \dfrac{-3n+2}{-n+3}$;

8) $x_n = \dfrac{-5n+3}{-2n+7}$;

9) $x_n = \dfrac{-2n+3}{-3n+1}$;

11) $x_n = \dfrac{4n-6}{-3n+5}$;

12) $x_n = \dfrac{n+1}{-3n-2}$;

13) $x_n = \dfrac{2n-9}{-7n+10}$;

14) $x_n = \dfrac{-5n+1}{-2n-3}$;

15) $x_n = \dfrac{6n-5}{4n-3}$;

16) $x_n = \dfrac{-n+8}{-5n+4}$;

17) $x_n = \dfrac{3n-7}{4n+5}$;

18) $x_n = \dfrac{4n-11}{2n+9}$;

19) $x_n = \dfrac{n+12}{-5n+2}$;

20) $x_n = \dfrac{-2n+11}{4n+7}$;

21) $x_n = \dfrac{5n-4}{-4n+11}$;

22) $x_n = \dfrac{-5n+1}{-4n-3}$;

23) $x_n = \dfrac{4n+9}{-n+5}$;

24) $x_n = \dfrac{-3n+2}{2n+11}$;

25) $x_n = \dfrac{-4n+11}{3n-2}$;

26) $x_n = \dfrac{2n+5}{-3n+7}$;

27) $x_n = \dfrac{-3n+10}{-5n+6}$;

28) $x_n = \dfrac{5n-11}{-2n+7}$;

29) $x_n = \dfrac{2n-7}{3n-8}$;

30) $x_n = \dfrac{6n-5}{3n+2}$;

31) $x_n = \dfrac{5n+8}{-6n-1}$.

6. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[3]{1+tg2x}-1\right)\cdot \ln\left(1+\sin^2 3x\right)}{(1-\cos x)\cdot\left(2^{arctg4x}-1\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 3x)\cdot\left(\sqrt{1-arctgx}-1\right)}{\left(e^{\sin^2 2x}-1\right)\cdot \ln(1-\arcsin 3x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2\left(1+tg^2 3x\right)\cdot\left(3^{\sin 4x}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{1+\arcsin 2x}-1\right)\cdot(1-\cos 2x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{arctg5x^2}-1\right)\cdot \ln(1-\sin 4x)}{\left(\sqrt{1+tg6x}-1\right)\cdot(1-\cos 4x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3\left(1-\sin^3 2x\right)\cdot\left(\sqrt{1+\arcsin 3x}-1\right)}{\left(4^{tg^2 x}-1\right)\cdot(1-\cos 6x)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 4x-1)\cdot \ln(1-\sin(tg2x))}{\left(e^{3x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[5]{1+arctg\,2x}-1\right)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[4]{1\arcsin 2x^2}-1\right)\cdot \ln(1+tg3x)}{(1-\cos 4x)\cdot\left(5^{4x}-1\right)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(\sin 2x))\cdot \ln(1-actg4x)}{\left(\sqrt{1-\sin^2 2x}-1\right)\cdot\left(6^{5x}-1\right)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{tg^2 4x}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{1-tg2x}-1\right)}{(1-\cos(\sin 2x))\cdot \ln(1-tg\,\pi x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[6]{1+tg\left(\sin 2x^2\right)}-1\right)\cdot \ln(1+\arcsin 7x)}{(1-\cos 5x)\cdot\left(2^{arctgx^2}-1\right)}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\cos\left(tg3x^2\right)\right)\cdot\left(3^{arctg2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-\sin^2 2x^2}-1\right)\cdot \ln(1+\arcsin 8x)}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\pi^{\sin^2 4x}-1\right)\cdot \ln\left(1-arctg^2 x\right)}{\left(\sqrt[7]{1+tg2x^2}-1\right)\cdot(\cos 6x-1)}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[8]{1-tg\left(\arcsin 3x^2\right)}-1\right)\cdot \log_3(1-arctg\,4x)}{(\cos 7x-1)\cdot\left(2^{\sin 6x}-1\right)}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2\sin^2 3x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-tg^3 2x}-1\right)}{\left(1-\cos 3x^2\right)\cdot\ln\left(1+\arcsin 10x\right)}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos(\sin 3x)\right)\cdot\left(\sqrt[6]{1+arctg\,2x^2}-1\right)}{\log_5\left(1-\arcsin^2 4x\right)\cdot\left(2^{1-\cos x}-1\right)}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left((1+\sin 2x)^{11}-1\right)\cdot\left(3^{\sin^2 4x}-1\right)}{\left(1-\cos 8x\right)\cdot\ln\left(1-\sin(\sin 3x)\right)}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^{tg\,5x}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{1-\sqrt{\arcsin x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos\dfrac{5}{2}x\right)\cdot\log_4\left(1-\sin^2 2x\right)}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos 6x\right)^2\cdot\left(\sqrt{1+tg^2 2x^2}-1\right)}{\left(e^{\sin^2 x^3}-1\right)\cdot\ln\left(1-tg\sin^2 3x\right)}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(6^{tg\,3x^2}-1\right)\cdot\left(1-\cos(\arcsin 4x)\right)}{\left(\sqrt[3]{1+\sin^2 4x}-1\right)\cdot\log_7\left(1+\arcsin^2 5x\right)}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1+tg^2\sin 2x}-1\right)\cdot\left(e^{1-\cos 2x}-1\right)}{\arcsin^3 3x\cdot\ln\left(1-\sqrt{\sin(\sin x^2)}\right)}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos(2tgx^2)\right)\cdot\left(\sqrt[3]{1-\sin x^2}-1\right)}{\left(e^{\arcsin 2x^3}-1\right)\cdot\ln\left(1+\sqrt{arctg\,2x^2}\right)}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\pi^{tg^2(tg\,2x)}-1\right)\cdot\left(1-\cos 8x\right)}{\left(\sqrt[5]{1-\sin 3x^3}-1\right)\cdot\log_6\left(1+\sqrt{tgx^2}\right)}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(4^{\arcsin x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[10]{1-arctg\,3x^2}-1\right)}{\left(1-\cos(tg\,6x)\right)\cdot\ln\left(1-\sqrt{\sin x^2}\right)}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\cos(5\arcsin 2x)-1\right)\cdot\log_3\left(1+\sin(tg^2 4x)\right)}{\left(\sqrt{1-arctg^2 6x}-1\right)\cdot\left(5^{tg\,2x^2}-1\right)}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1+tg(\sin^2 x)}-1\right)\cdot\ln\left(1-2tg(tgx^3)\right)}{\left(e^{\arcsin 4x}-4\right)\left(1-\cos(\sin^2 2x)\right)}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos\sqrt{tg\,4x^2}\right)\cdot\left(6^{\sin^2 3x}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1-\sin 3x^3}-1\right)\cdot\log_2\left(1+3\arcsin(tgx^2)\right)}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+2\sin^2 3x}-1\right)\cdot\left(1-\cos 3x\right)}{\left(e^{tg^3 2x}-1\right)\cdot\ln\left(1+2\sin 7x\right)}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^{6tg^2 x}-1\right)\cdot\left(\sqrt[7]{1-3\sin 5x}-1\right)}{\left(1-\cos(2\sin 3x)\right)\cdot\log_8\left(1-3arctg\,10x\right)}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(8^{3\arcsin^3 2x}-1\right)\cdot\ln\left(1+4tg\,9x\right)}{\left(1-\cos(5arctg\,3x)\right)\cdot\left(\sqrt[10]{1-10\sin 3x}-1\right)}$;

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1-3arctg^2 2x}-1\right)\cdot\left(e^{\sin^2 6x}-1\right)}{\left(1-\cos(3\sin 4x)\right)\cdot\log_3\left(1+7tg8x^2\right)}.$

7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и построить её график:

1) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если x} \le 1, \\ \sin(\text{x - 1}), & \text{если} \, 1<x\le 2, \\ x^2, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если x} \le 2, \\ -x+6, & \text{если } 2<x\le 3, \\ 4^{3x-3}, & \text{если x} > 3. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если x} \le 1, \\ -x+3, & \text{если} \, 1<x\le 2, \\ 2^{-x}, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если x} \le 1, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2}, & \text{если} \, 1<x\le 2, \\ \log_2(x-1), & \text{если x} > 2. \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если x} \le 1, \\ 2^{x-1}-1, & \text{если} \, 1<x< 2, \\ \sin\pi x, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & \text{если x} \le 1, \\ 3\sin\dfrac{\pi x}{2}, & \text{если} \, 1<x\le 2, \\ 2^x, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{если x} \le 1, \\ x+1, & \text{если} \, 1<x\le 2, \\ e^x, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если x} \le -1, \\ -2x, & \text{если} -1<x\le 2, \\ \ln x, & \text{если x} > 2. \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если } x<1, \\ x^2, & \text{если } 1\le x<2, \\ 3+\log_2 x, & \text{если } x\ge 2. \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \cos\pi x, & \text{если } x\le 1, \\ x^2-2x, & \text{если } 1<x\le 3, \\ -2x+4, & \text{если } x>3. \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \text{если } x\le 2, \\ 2x-4, & \text{если } 2<x\le 3, \\ 3^x, & \text{если } x>3. \end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}x, & \text{если } 1<x\le 4, \\ -x, & \text{если } x>4. \end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & \text{если } x\le 2, \\ \ln\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{если } 2<x\le 3, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{если } x>3. \end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{если } x\le 1, \\ -2x-1, & \text{если } 1<x<2, \\ -2^x, & \text{если } x\ge 2. \end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & \text{если } x\le 0, \\ tg\,\pi x, & \text{если } 0<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 2^x, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & \text{если } x\le \text{-}2, \\ x, & \text{если } -2<x\le 1, \\ \log_2(x+1), & \text{если }. \end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 1, \\ 2ctg\,\dfrac{\pi x}{4}, & \text{если } 1<x<4, \\ 3-x, & \text{если } x\ge 4. \end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases} -2x+1, & \text{если x < -1,} \\ 4, & \text{если } -1 \le x < 1, \\ 4^{x}, & \text{если x} \ge 1. \end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} -x^{2}, & \text{если x} \le 2, \\ -2x, & \text{если } 2 < x \le 4, \\ \dfrac{3}{x}, & \text{если x > 4.} \end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases} 4-x^{2}, & \text{если x < 2,} \\ \sqrt{x-2}, & \text{если } 2 \le x < 3, \\ x, & \text{если x} \ge 3. \end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} x^{2}+2x, & \text{если x} \le 1, \\ 3\sin\dfrac{\pi x}{2}, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 2^{x}, & \text{если} > 2. \end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если x < -1,} \\ x^{2}, & \text{если } -1 \le x < 2, \\ 3, & \text{если x} \ge 2. \end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases} -2, & \text{если x < -1,} \\ -x^{2}, & \text{если } -1 \le x \le 3, \\ -3x, & \text{если x > 3.} \end{cases}$

24) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если x} \le 1, \\ -\sqrt{x}, & \text{если } 1 < x \le 4, \\ x^{2}-5x-4, & \text{если x} \ge 4. \end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases} x^{2}-x, & \text{если x} \le 0, \\ \cos x-1, & \text{если } 0 < x \le 2, \\ 2^{-x}, & \text{если x > 2.} \end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{если x} \le -2, \\ \text{sinx}, & \text{если } -2 < x \le 0, \\ x^{3}, & \text{если x > 0.} \end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases} x^{2}+3x, & \text{если x} \le 1, \\ 2x+2, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 2^{x}, & \text{если x} \ge 2. \end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases} arctgx, & \text{если x} \le 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x \le 3, \\ 2x-4, & \text{если x} > 3. \end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases} x^3-1, & \text{если x} \le 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } 1 < x \le 5, \\ -2x, & \text{если x} > 5. \end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & \text{если x} \le -2, \\ 2-x^2, & \text{если } -2 < x \le 1, \\ 2x-1, & \text{если x} > 1. \end{cases}$

31) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & \text{если x} \le 0, \\ tg\,\pi x, & \text{если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 4^x, & \text{если x} > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

32) $f(x)=\begin{cases} -x^2+3, & \text{если x} \le \text{-2}, \\ 2x, & \text{если } -2 < x \le 1, \\ \log_2(x+2), & \text{если x} > 1\,. \end{cases}$

33) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4, & \text{если x} \le 1, \\ 4ctg\,\dfrac{\pi x}{4}, & \text{если } 1 < x < 4, \\ 2+x, & \text{если x} \ge 4. \end{cases}$

34) $f(x)=\begin{cases} -2x+2, & \text{если x} < \text{-1}, \\ 6, & \text{если } -1 \le x < 1, \\ 6^x, & \text{если x} \ge 1. \end{cases}$

35) $f(x)=\begin{cases} x^3-3, & \text{если x} \le 1, \\ \sqrt{x-3}, & \text{если } 1 < x \le 5, \\ -6x, & \text{если x} > 5. \end{cases}$

36) $f(x)=\begin{cases} \sin 2\pi x, & \text{если x} \le 2, \\ \ln\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{если } 2 < x \le 3, \\ -\dfrac{x}{4}, & \text{если x} > 3. \end{cases}$

37) $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & \text{если x} \le 1, \\ -2x+4, & \text{если } 1 < x < 2, \\ -4^x, & \text{если x} \ge 2. \end{cases}$

8. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)$, сделайте эскиз графика:

1) $f(x)=3^{\frac{4}{(x-2)^2(x^2+5x+4)}}$;

2) $f(x)=-2^{\frac{3}{(x-1)^2(x^2-5x+6)}}$;

3) $f(x)=4^{\frac{2}{x^2(x^2-4x+3)}}$;

4) $f(x)=-3^{\frac{1}{(x+1)^2(x^2-3x+2)}}$;

5) $f(x)=-4^{\frac{1}{(x+2)^2(x^2-6x+2)}}$;

6) $f(x)=-5^{\frac{1}{(x-3)^2(x^2-2x)}}$;

7) $f(x)=6^{\frac{2}{|x+2|\cdot x}}$;

8) $f(x)=e^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+2x)}}$;

9) $f(x)=2^{\frac{3}{(x-1)(x+2)}}$;

10) $f(x)=5^{\frac{2}{(x-2)^2(x^2-1)}}$;

11) $f(x)=3^{\frac{4}{(x-3)^2(x^2+x-2)}}$;

12) $f(x)=-8^{\frac{2}{(x+4)^2(x^2+11x+30)}}$;

13) $f(x)=-e^{\frac{3}{(x+3)^2(x^2+9x+20)}}$;

14) $f(x)=-6^{\frac{-2}{(x+5)^2(x^2-4x+3)}}$;

15) $f(x)=2^{\frac{-1}{(x-5)^2(x^2-8x+12)}}$;

16) $f(x)=-4^{\frac{3}{(x+3)^2(x^2-4x)}}$;

17) $f(x)=64^{\frac{1}{(x-4)^2(x^2-2x)}}$;

18) $f(x)=2^{\frac{3}{(x-1)^2(4-x^2)}}$;

19) $f(x)=e^{\frac{2}{(x-3)^2(x^2-4x)}}$;

20) $f(x)=4^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2-2x-3)}}$;

21) $f(x)=5^{\frac{-2}{(x+1)^2(x^2+5x-6)}}$;

22) $f(x)=-4^{\frac{1}{(x+4)^2(x^2-2x)}}$;

23) $f(x)=-2^{\frac{3}{(x-4)^2(x^2-13x+42)}}$;

24) $f(x)=-\pi^{\frac{2}{(x+6)^2(x^2+4x+3)}}$;

25) $f(x)=2^{\frac{-3}{(x-4)^2(x^2-4x-5)}}$;

26) $f(x)=-5^{\frac{1}{x^2(x^2+6x+8)}}$;

27) $f(x)=6^{\frac{-1}{(x+2)^2(x^2+2x-3)}}$;

28) $f(x)=-2^{\frac{3}{(x+3)^2(x^2+3x-4)}}$;

29) $f(x)=\pi^{\frac{-2}{(x+4)^2(x^2+8x+12)}}$;

30) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{(x-5)^2(x^2-x-2)}}$;

31) $f(x)=-2^{\frac{2}{(x+3)^2(x^2-4x)}}$;

32) $f(x)=-3^{\frac{-3}{(x+5)^2(x^2-4x+3)}}$;

33) $f(x)=3^{\frac{-1}{(x-5)^2(x^2-8x+12)}}$;

34) $f(x)=32^{\frac{1}{(x-4)^2(x^2-2x)}}$.

9.Найдите пределы, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+7)[\ln(x+1)-\ln(x+3)]$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln(3x+1)-\ln 3x]$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)[\ln(2x-3)-\ln(2x-1)]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+3x^2}{1-2x^2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+3)[\ln(5x+2)-\ln(5x-1)]$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{3}{x^2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-7)[\ln(x+4)-\ln(x+5)]$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+4x^2}{1+2x^2}\right)^{\frac{2+x}{x^2}}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)[\ln(2x-3)-\ln 2x]$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+x^2}{2+x^2}\right)^{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)[\ln(3x+4)-\ln(3x-2)]$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{3x^2}{(x+1)}}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)[\ln(4x+2)-\ln(4x-1)]$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x+2)]$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3+2x}{1-4x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)[\ln(3+2x)-\ln(2x-1)]$; 20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)^{\frac{5x^2+1}{4x-1}}$;

21) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-9)[\ln(6x+1)-\ln 6x]$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-2x^2}{3+x^2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)[\ln(2x+10)-\ln(2x-3)]$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x^2}{1-2x^2}\right)^{2x^2+1}$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty}(8x-1)[\ln(9x+2)-\ln 9x]$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4x^2+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^3}}$;

27) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x-2)[\ln(2x-3)-\ln(2x+5)]$; 28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^2-4}{3x^2-4}\right)^{\frac{2x-1}{2x^2}}$;

29) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+8)[\ln(x+2)-\ln(x-5)]$; 30) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4x^2-1}{x^2-1}\right)^{\frac{x+3}{4x^2}}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(x+2)-\ln(x+5)]$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2-1}\right)^{2x}$;

33) $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x+1)[\ln(-3x+1)-\ln 3x]$; 34) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2-4}\right)^{x^2}$;

35) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-7)[\ln(2x-5)-\ln(4x-1)]$; 36) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+3x^2}{2-2x^2}\right)^{-\frac{2}{x^2}}$;

37) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(3x+2)-\ln(3x-1)]$; 38) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)^{\frac{2}{x^2}}$;

39) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)[\ln(x+2)-\ln(x+3)]$; 40) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x^2}{1+4x^2}\right)^{\frac{2+x}{x^2}}$;

41) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)[\ln(2x-1)-\ln 2x]$; 42) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2+x^2}{4+x^2}\right)^{x^2}$;

42) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)[\ln(2x+6)-\ln(2x+1)]$; 43) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-5+2x}{1-3x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}}$;

44) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)[\ln(3+6x)-\ln(4x-2)]$; 45) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{\frac{5x^2+1}{4x-1}}$;

46) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-7)[\ln(4x+1)-\ln 4x]$; 47) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-2x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}}$;

48) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(3x+6)-\ln(2x-3)]$; 494) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-5x^2}{1-5x^2}\right)^{2x^2+1}$;

50) $\lim\limits_{x\to\infty}(8x-3)[\ln(9x+4)-\ln 9x]$; 51) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4x^2+2}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x^3}}$.

10. Найдите пределы, используя замечательные пределы и их следствия:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/tg\,2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+ctg\,\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/\sqrt{x^2-1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,\pi x)^{1/\arcsin x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)^{1/\cos(\pi x/2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/2\sin\pi x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\arcsin x)^{1/\sin(\pi/2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3+0}\left(1+\sqrt{x^2-9}\right)^{1/tg\,\pi x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-\arccos x)^{1/x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{ctg\,2x}$; 13) $\lim\limits_{x\to -3-0}\left(1+\sqrt{x^2-9}\right)^{ctg\,\pi x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{1/\arccos x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(1-arctg\,x)^{1/\cos x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)^{1/\sin\pi x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)^{1/\sin(\pi x/2)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\,\dfrac{x}{2}\right)^{1/\sin 2x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,2x)^{1/\sin 3x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 4+0}\left(1+\sqrt{x^2-16}\right)^{1/tg\,\pi x}$; 24) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}(4+3\cos 3x)^{1/tg\,3x}$;

18) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(2-tg\,x)^{1/\cos 2x}$; 25) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}(1+\sin 3x)^{ctg\,3x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 1}(1-tg\,2\pi x)^{1/\sin\pi x}$; 26) $\lim\limits_{x\to \pi+0}\left(1+\sqrt{x-\pi}\right)^{ctg\,3x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(1+\sqrt{x-2}\right)^{1/\cos\frac{\pi x}{4}}$; 27) $\lim\limits_{x\to \pi}(1-\sin 2x)^{ctg\,x}$;

21) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(2-ctg\,x)^{1/\sin 4x}$; 28) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+ctg\,3x)^{1/\cos x}$;

22) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{1/2x-\pi}$; 29) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1-\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/\arccos x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 3+0}\left(1-\sqrt{x-3}\right)^{1/\sin\pi x}$; 30) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)^{1/4x-\pi}$.