

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНГУШСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Методическое пособие

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Направление подготовки 01.03.01 – Математика

Программа *академический бакалавриат*

Квалификация *бакалавр*

Форма обучения *очная*

Факультет *физико-математический*

Кафедра *Математический анализ*

Магас 2018

УДК 517

Составители: С.В. ИСРАИЛОВ, И.А. ТАНКИЕВ, М.Х. МАЛЬСАГОВ

Методическое пособие по обыкновенным дифференциальным уравнениям
для студентов 2-3 курсов физико-математических специальностей.

Методическое пособие рассмотрено на заседании УМС ИнгГУ
от 28.02.2018 протокол № 6

© Ингушский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Курс «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» является одним из важнейших разделов курса высшей математики. К дифференциальным уравнениям приводят большое число задач из самых различных разделов науки. При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции содержатся под знаком производной. Такие уравнения называются дифференциальными; они служат важным средством моделирования различных процессов.

Цель настоящей книги - помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания.

В предлагаемом пособии курс разбит на отдельные темы. Причем структура материала такова: в каждой теме излагаются основные теоретические сведения и алгоритмы решения типовых задач. Далее следует блок задач для решения на практических занятиях по закреплению теоретического материала темы и варианты контрольных заданий по рассматриваемой теме.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Тема 1.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1. Основные понятия и определения.

Дифференциальные уравнения - один из важнейших разделов курса «Высшая математика». К дифференциальным уравнениям приводят большое число задач из самых различных разделов науки. Введем, прежде всего, необходимые определения.

Определение. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой независимой переменной и ее производные.

Если обозначить независимую переменную через x , неизвестную функцию через $y = y(x)$, а ее производные, $y', y'', \dots, y^{(n)}$, то дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Если это уравнение разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно примет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Такое уравнение называется *разрешенным относительно старшей производной*.

Определение. График решения $y = y(x)$, дифференциального уравнения

называется интегральной кривой.

Простейшим дифференциальным уравнением (первого порядка) является уравнение вида $y' = f(x)$.

Как известно из раздела «Интегральное исчисление», его решение задается формулой

$$y = F(x) + C,$$

где $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ (на рассматриваемом промежутке), а C - произвольная постоянная, т.е. решение такого уравнения сводится к нахождению неопределенного интеграла для функции $f(x)$.

Дифференциальные уравнения первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

или, в виде, разрешенном относительно производной:

$$y' = f(x, y).$$

Задача Коши для такого уравнения состоит в нахождении его решения, удовлетворяющего начальному условию вида: при $x = x_0$ функция $y = y(x)$ принимает значение равное y_0 , что записывается в виде:

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Существуют условия, накладываемые на функцию $f(x, y)$ при которых задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение.

Часто встречается дифференциальная форма записи уравнения первого порядка

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

которая удобна тем, что в качестве искомой функции может быть как $x = x(y)$,

так и $y = y(x)$, причем везде $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, в силу основного дифференциального соотношения.

Пример, $2xy' - 3x = 0$, $3y'' + 5x^2y = 0$ дифференциальные уравнения соответственно 1-го, 2-го порядков, а уравнение $2xdx + 5y^4dy = 0$, уравнение 1-го

порядка в дифференциалах.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$, где C - произвольная постоянная, называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка, если она удовлетворяет условиям:

1). $y = \varphi(x, C)$ является решением при любом C , т.е. при подстановке ее самой и ее производной в уравнение оно обращается в тождество;

2). при любом начальном условии $y|_{x=x_0} = y_0$, взятом из области существования и единственности решения, найдется такое значение произвольной постоянной $C=C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет этому начальному условию: $\varphi(x, C_0) = y_0$.

Определение. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, получающаяся из общего решения $\varphi(x, C)$ при конкретном числовом значении произвольной постоянной $C=C_0$.

Определение. Решить дифференциальное уравнение означает:

1) найти его общее решение;

2) найти его частные решение, если заданы начальные условия.

Пример. Для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Общим решением будет семейство функций

$$y = \frac{C}{x} \text{ (убедиться).}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующему начальному условию:

$$y_0 = 1, \text{ при } x_0 = 2, \text{ т.е. решается}$$

задача Коши: $y(2)=1$.

Подставим эти начальные данные в формулу общего решения

$$y = \frac{C}{x},$$

Получим $1=C/2$ или $C=2$, Следовательно; искомым частным решением (решением задачи Коши) будет функция $y=2/x$.

Замечание 1. Возможно существование решения дифференциального уравнения первого порядка, которое не получается из общего решения ни при каких числовых значениях произвольной постоянной C (включая, предельные случаи $C=\pm \infty$); такие решения называются *особыми* решениями.

При интегрировании дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с общим решением были найдены также и особые решения.

Замечание 2. В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида $\Phi(x,y;c)=0$, не разрешенному относительно y . Разрешив это соотношение относительно y , получаем общее решение. Однако выразить y из этого соотношения в элементарных функциях не всегда оказывается возможным; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде. Равенство вида $\Phi(x,y;c)=0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x,y)$ есть произведение функций, зависящей только от x на функцию, зависящую только от y , т.е. уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (1)$$

или приводящееся к такому виду при помощи алгебраических преобразований, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Из этого определения следует, что дифференциальное уравнение вида $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) dx + \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) dy = 0$ также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. В самом деле, из последнего уравнения следует, что

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) dy = -\psi_1(x) \cdot \psi_2(y) dx,$$

поэтому

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)}{\psi_1(x) \cdot \psi_2(y)}$$

или

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

где

$$f_1(x) = -\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}; \quad f_2(y) = \frac{\varphi_2(y)}{\psi_2(y)}.$$

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (1) можно привести к уравнению с разделенными переменными, разделив обе части этого уравнения на $f_2(y)$ ($f_2(y) \neq 0$) и умножив на dx :

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Обозначив через $F_1(x)$ и $F_2(y)$ первообразные функций $f_1(x)$ и $\frac{1}{f_2(y)}$

соответственно, мы можем записать это уравнение в виде

$$dF_2(y) = dF_1(x).$$

Отсюда следует, что

$$F_2(y) = F_1(x) + C$$

или

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Это равенство дает общий интеграл дифференциального уравнения (1). Если его можно разрешить относительно переменной y , то мы получим общее решение дифференциального уравнения (1).

При делении уравнения (1) на $f_2(y)$ мы могли потерять решения $y = \text{const}$, являющиеся решением уравнения

$$f_2(y) = 0.$$

Эти решения могут оказаться особыми.

Пример. Решить уравнение $y' = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$.

Решение. Разделяем переменные

$$dy' = \sin x \cdot \operatorname{tg} y dx$$

или

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \sin x dx,$$

т.е.

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \sin x dx$$

значит

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \sin x dx + C.$$

Получаем общий интеграл:

$$\ln |\sin y| = -\cos x + C.$$

Пример. Решить уравнение

$$(xy^2 + x)dx + (x^2 + 1)dy = 0$$

Решение. Имеем

$$\frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{y}{y^2 + 1} dy = 0$$

Умножаем обе части уравнения на 2:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} dx + \frac{2y}{y^2 + 1} dy = 0$$

и получаем

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \ln C$$

(Здесь удобнее записать произвольную постоянную через $\ln C$, а не через C).

$$\ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) = \ln C$$

или

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C.$$

Мы нашли общий интеграл этого дифференциального уравнения.

Из начальных условий найдем произвольную постоянную C , подставляя вместо x и y нули:

$$(0+1)(0+1)=C,$$

т.е. $C=1$. окончательно получаем частный интеграл-решение задачи Коши:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 1.$$

Пример. Решить уравнение

$$(x+1)\sqrt{y} dx + xdy = 0.$$

Решение. Разделяя переменные, получим

$$\frac{x+1}{x} dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

При этом могли потерять решения вида

$$x = 0, \quad \sqrt{y} = 0.$$

Интегрируя предыдущее уравнение найдем общий интеграл

$$x + \ln|x| - 2\sqrt{y} = C.$$

Другие решения исходного уравнения будут

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0,$$

Причем эти решения не получаются из общего решения ни при каком числовом значении C , т.е. это особые решения.

Ответ: $x + \ln|x| - 2\sqrt{y} = C$, $x \equiv 0$, $y \equiv 0$.

Замечание. Произвольная постоянная, возникающая при интегрировании, может быть записана в виде kC или $k \ln C$, где k -любой постоянный (ненулевой) множитель.

В некоторых случаях такая запись удобна для упрощения ответа.

Задача. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t = 0$ масса радия была m_0 .

Решение. Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m , в момент $t + \Delta t$ – масса $m + \Delta m$. За время Δt распалась масса Δm .

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого соотношения при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

есть скорость распада радия в момент t . По условию задачи

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (2)$$

где k -коэффициент пропорциональности ($k > 0$). Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает и, следовательно, $\frac{dm}{dt} < 0$.

Уравнение (2) есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

$$\frac{dm}{m} = -k dt.$$

Решая уравнение, получим $\ln m = -kt + \ln C$, откуда

$$\ln \frac{m}{C} = -kt.$$

$$m = Ce^{-kt}. \quad (3)$$

Так как при $t=0$ масса радия была m_0 то C должно удовлетворять соотношению $m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C$. Подставляя это значение C в равенство (3) получим искомую зависимость массы радия как функцию времени:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (4)$$

Коэффициент k определяется из наблюдений следующим образом. Пусть за время $t_0=0$ распадается α % от первоначальной массы радия. Следовательно,

выполняется соотношение

$$1 - \left(\frac{\alpha}{100} \right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

откуда

$$-kt_0 = \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right), \text{ или } k = -\frac{1}{t_0} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right).$$

Таким образом, было определено, что для радия $k=0,000436$ (единица

измерения времени - год). Подставляя это значение k в формулу (4), получим:

$$m = m_0 e^{-0,000436t}.$$

Найдем период полураспада радия, т.е. промежуток времени, за который распадется половина первоначальной массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $m_0 / 2 = m_0 e^{-0,000436T}$, откуда $-0,000436T = -\ln 2$ или

$$T = \frac{\ln 2}{0,000436} = 1590 \text{ лет}$$

Заметим, что к уравнению вида (2) приводят и другие задачи физики и химии.

Задания для самостоятельной работы к теме 1.

Решить уравнения.

1. $y' = y^2 - y$.
2. $(x^2 + x)y' - (2x + 1)y = 0$
3. $y' \cos x + y(1 + y) \sin x = 0$.
4. $x^3 y dy = (x - 1) dx$.
5. $x(1 - y^2)y' = y(1 + y^2)$.
6. $x(y + 1)dy = (1 - y^2)dx$.
7. $(1 - x^2)yy' + x = 0$.
8. $(1 + y^2)ydx = x(1 + 2y^2)dy$.
9. $y'tg^2 x - ctgy = 0$.
10. $ye^x dy + xe^{y^2} dx = 0$.
11. $(x - 1)yy' + (x^2 + 1)(y + 1)^2 = 0$.
12. $y'\sqrt{1 - x^4} + x(1 + e^y) = 0$.

С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделяющимися переменными и решить их:

13. $(2x + y + 2)dx - (4x + 2y + 9)dy = 0$.
14. $(4 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0$.
15. $2y(1 + y^2)dx + x(3y^2 + y + 3)dy = 0, y(1) = 1$.
16. $x(1 + y)y' = y^2, y(1) = 1$.

$$17. (y+2)y' = \sin 2x, y(0) = 1.$$

$$18. (x^2 + x)y' - (x^2 + x + 1)y = 0, y(1) = \frac{e}{2}.$$

$$19. y' + 3y^2 = 3y, y(0) = \frac{1}{2}.$$

Ответы.

$$1. y(1 + Ce^x) = 1, y = 0.$$

$$2. y = C(x^2 + x).$$

$$3. y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}, y = -1.$$

$$4. y^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + C, x = 0.$$

$$5. x(y^2 + 1) = Cy, y = 0.$$

$$6. x(y - 1) = C, y = -1.$$

$$7. y^2 + \frac{1}{1 - x^2} = C.$$

$$8. x^2 = Cy^2(1 - y^2), y = 0.$$

$$9. \ln|\cos y| - \operatorname{ctgx} - x = C, y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$10. e^{-x^2} + 2(x+1)e^{-x} = C.$$

$$11. \frac{x^2}{2} + x \ln(x-1)^2 + \ln|y+1| + \frac{1}{1+y} = C, y = -1.$$

$$12. \frac{1}{2} \arcsin x^2 + y - \ln(1 + e^y) = C.$$

$$13. y + 2x + 4 = Ce^{x-2y}.$$

$$14. (x + 2y)^2 - 3x + 4y = C.$$

$$15. 2y - x + 2 = Ce^{x+2y}.$$

$$16. \ln x^2 + 3 \ln y + \operatorname{arctgy} = \frac{\pi}{4}.$$

$$17. \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 1.$$

$$18. y^2 + 4y + \cos 2x = 6.$$

$$19. y = \frac{xe^x}{x+1}. 1+ч$$

$$20. y = \frac{1}{x+1^{-3x}}.$$

Варианты контрольных заданий к теме 1.

$$1. (1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0.$$

$$2. (1+y^2)dx + xydy = 0.$$

$$3. (1+x)y^2y' + x^2(1-y) = 0.$$

$$4. (1+y^2)dx = xdy.$$

$$5. x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$$

$$6. x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0; y(0) = 1.$$

$$7. e^{-y}(1+y') = 1.$$

$$8. y\ln y dx + xdy = 0; y(1) = 1.$$

$$9. y' = 2^{x+y}.$$

$$10. e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0.$$

$$11. (1+y'')yy' = e^y; y(0) = 0.$$

$$12. (1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0.$$

$$13. y' = \sin(x-y).$$

$$14. y' = 2x + 3y + 1.$$

$$15. (x+y)^2 y' = 1.$$

$$16. xy(1+y^2) = y'(1+x^2).$$

$$17. (1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dy.$$

$$18. xy' - y = y' + y^2.$$

$$19. (1+x^2)dy + xydx = 0.$$

$$20. x^2(1+y) + y'y^2(1-x) = 0.$$

$$21. (1+x^2)dy = ydx.$$

$$22. y' + 1 = y'e^x.$$

$$23. y - xy' = 1 + x^2 y'.$$

$$24. y' = \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$25. xy'(1+x^2)y' = 1+y^2.$$

$$26. y' = \sqrt{2x+y+1}.$$

$$27. e^x(1+y^2)dx - 2y(1+e^x)dy = 0.$$

$$28. (1+x^2)(e^{2y}dy - e^x dx) - (1+x)dx = 0.$$

$$29. (1+x^2)dy = (x - \sqrt{1+x^2})(1+y^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

$$30. y' \sqrt{x+2y+1} = 1.$$

Тема 2.

Однородные уравнения и уравнения сводящиеся к ним.

1. Однородные уравнения.

Определение: Функция $z = f(x, y)$ называется однородной степени n , если для любого λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$$

Пример. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ – однородная функция второй степени :

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 3(\lambda x) \cdot (\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda (x^2 - 3xy + y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

Пример. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ – однородная функция нулевой степени :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 xy} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Определение: Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени.

Из этого определения следует, что

1) уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени n также является однородным. В самом деле, это уравнение можно переписать в виде

$$Q(x, y)dy = -P(x, y)dx$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Тогда правая часть этого уравнения будет однородной функцией нулевой степени:

$$\frac{P(\lambda x; \lambda y)}{Q(\lambda x; \lambda y)} = \frac{\lambda^n P(x; y)}{\lambda^n Q(x; y)} = \frac{P(x; y)}{Q(x; y)},$$

что и требовалось доказать.

2) Уравнение вида

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

также является однородным. Последнее утверждение легко проверяется:

$$\varphi\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть

$$y' = f(x, y)$$

- однородное дифференциальное уравнение, т.е. $f(\lambda x; \lambda y) = f(x, y)$. Положим $\lambda = 1/x$ и приведем уравнение к виду

$$y' = f\left(1; \frac{y}{x}\right),$$

где первая часть уравнения есть функция отношения y/x . Введем новую неизвестную функции $u = u(x)$, полагая

$$\frac{y}{x} = u$$

Тогда $y = xu$, и $y' = u + u'x$. Таким образом наше уравнение относительно новой неизвестной функции примет вид:

$$u + u'x = f(1; u)$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$x \frac{du}{dx} = f(1; u) - u$$

или, разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{f(1; u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

при помощи интегрирования находим общий интеграл этого уравнения:

$$\int \frac{du}{f(1; u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

или

$$\int \frac{du}{f(1;u)-u} = \ln|x| + C.$$

После вычисления интеграла, стоящего в левой части этого равенства, надо заменить функцию u отношением y/x , и задача будет решена.

Пример: Решить уравнение:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Решение. То, что функция, стоящая в правой части этого уравнения, является однородной нулевой степени, проверено в п. 1. Делаем замену:

$$\frac{y}{x} = u \quad y = xu \quad y' = u + u'x$$

и получаем

$$u + u'x = \frac{x^2 + (xu)^2}{x \cdot xu}$$

или

$$u + u'x = \frac{x^2 + (1+u^2)}{x^2 u}$$

т.е.

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u} - u$$

Значит

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2 - u^2}{u}$$

Разделяя переменные, получаем:

$$u du = \frac{dx}{x},$$

т.е.

$$\int u du = \int \frac{dx}{x} + C$$

Таким образом

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

Окончательно получаем:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$

-общий интеграл данного уравнения. $\square$

2. Уравнения сводящиеся к однородным.

Уравнение вида

$$y' = \frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1} \quad (1)$$

где a, b, c, a_1, b_1, C_1 - заданные постоянные, приводится к однородному.

Очевидно, что при $c = c_1 = 0$ уравнение (1) однородное (убедиться). Поэтому считаем c, c_1 (или одно из них) отличными от нуля.

Произведем, в общем случае, замену переменных:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

(т.е. преобразование параллельного переноса).

Тогда $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$.

Подставляя в (1) новые значения x, y и y' получим:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv + (a\alpha + b\beta + C)}{a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + C_1)}. \quad (2)$$

В силу произвольности α и β подберем их так, чтобы

$$\begin{cases} a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c = 0 \\ a_1 \cdot \alpha + b_1 \cdot \beta + c_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решив систему (3) находим α и β , при которых уравнение (2) становится однородным:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + b \cdot v}{a_1u + b_1v}.$$

Отсюда находим $v = f(u)$ и переходя снова к x и y получим решение исходного

уравнения.

В случае $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ система (3) не имеет решение. Но полагая

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k, \quad a = a_1 k, \quad b = b_1 k$$

исходное уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{(ax + by) + c}{k(ax + by) + c_1}$$

и подстановкой $ax + by = z$ оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение

$$y' = \frac{3x + 4y + 3}{2y + x + 1}$$

Решение. Вводя подстановку $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{3u + 4v + (3\alpha + 4\beta + 3)}{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)} \quad (4)$$

Подбираем теперь α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta + 3 = 0 \\ \alpha + 2\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

Ее решение дает $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{3u + 4v}{u + 2v} \quad (5)$$

(однородное уравнение). Для его решения воспользуемся подстановкой $v = zu$.

Имеем

$$\frac{dv}{du} = z + u \frac{dz}{du}$$

Учитывая это, из (5) получим:

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{3u + 4zu}{u + 2zu}$$

Или, сокращая справа на u и разделяя переменные:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1 + 2z}{2z^2 - 3z - 3} dz$$

Его интегрирование дает общий интеграл уравнения (5)

$$u = \frac{C}{2z^2 - 3z - 3} \left[\frac{4z + \sqrt{33} - 3}{4z - \sqrt{33} - 3} \right]^{5/4}$$

Заменяя в этой формуле $z = v/u$, запишем

$$u = \frac{Cu^2}{2v^2 - 3uv - 3u^2} \left[\frac{4v + (\sqrt{33} - 3)u}{4v - (\sqrt{33} - 3)u} \right]^{5/4}$$

Отсюда, производя обратную подстановку $u = x + 1$, $v = y$, получим

$$\frac{2y^2 - 3y(x+1) - 3(x+1)}{x+1} \left[\frac{4y - (\sqrt{33} + 3)(x+1)}{4y + (\sqrt{33} - 3)(x+1)} \right]^{5/4} = C$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

Решение. Замечая, что $2x + 4y + 3 = (x + 2y + 1) + 1$, введем подстановку: $x + 2y + 1 = z$, $z' = 1 + 2y'$. Следовательно, наше уравнение приводится к виду:

$$\frac{1}{2}(z' - 1) = \frac{x}{2x + 1}$$

Отсюда

$$\frac{z + 1}{2z + 1} dz = dx$$

Его интегрирование дает

$$C(2z + 1) = e^{4x - 2z}$$

Переходя к старым переменным, имеем:

$$C(2x + 4y + 3) = e^{2x - 4y - 2}$$

Это и есть общий интеграл нашего уравнения.

Задания для практических занятий к теме 2.

Решить уравнения.

$$1. xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

$$2. xy' = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

$$3. xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx$$

$$4. xydx = (x^2 y^2) dy$$

$$5. xdy = \left(y - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx$$

$$6. (x + 2y)dx + ydy = 0$$

$$7. (x + y + 1)dx + (x - y + 3)dy = 0$$

$$8. (2x - y - 2)dx + (x + y - 4)dy = 0$$

$$9. (x + 2y - 5)dx + (y - x - 4)dy = 0$$

$$10. (x - 1)y' + 3x + 2y + 3 = 0$$

$$11. (x + y - 2)y' + x - y = 0$$

$$12. (2x + y - 3)y' + y + 1 = 0$$

$$13. (x + 2y)y' + 2x + 5y - 1 = 0$$

$$14. y' = \frac{2x + y}{x - 2y}, y(1) = 0$$

$$15. y' = \frac{y - 2x}{x + 2y}, y(1) = 0$$

$$16. xyy' \setminus (x - 2y)^2, y(1) = 2$$

Ответы.

$$1. y = xe^{Cx}$$

$$2. Cx = (y - x)^2 e^{\frac{y}{x}}$$

$$3. y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, x = 0$$

$$4. y = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$5. y + \sqrt{x^2 + y^2} = C, x = 0$$

$$6. x + y = Ce^{\frac{x}{x+y}}$$

$$7. x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$$

$$8. y^2 + 2x^2 - 4y - 8x + 12 = Ce^{\frac{\sqrt{2} \arctg \frac{y-2}{(x-2)\sqrt{2}}}{(x-2)\sqrt{2}}}$$

$$9. x^2 + y^2 + xy - x - 5y + 7 = Ce^{2\sqrt{3} \arctg \frac{x+2y+1}{(x+1)\sqrt{3}}}$$

$$10. x + y + 2 = C(x - 1)e^{\frac{3}{x-1}}, x = 1$$

$$11. x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = Ce^{-2 \arctg \frac{y-1}{x-1}}$$

$$12. (y + 1)(x - 2)^3 = C(3x + y - 5)$$

$$13. x^2 + 2y^2 + 3xy + 2y = C \frac{x + 2y}{x + y + 1}$$

$$14. x^2 + y^2 = e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

$$15. (x^2 + y^2) e^{\arctg \frac{y}{x}} = 1$$

$$16. 3y - x = 5(y - x) \cdot e^{\frac{2-2x}{2}}$$

Варианты контрольных заданий к теме 2.

$$1. 4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$$

2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
3. $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$
4. $4x^2 + xy + 3y^2 + y'(y^2 + 2xy - 5x^2) = 0$
5. $2xy = y'(3x^2 - y^2)$
6. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$
7. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$
8. $x^2 + 2xy + y^2 + y'(x^2 + 2xy + 2y^2) = 0$
9. $(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$
10. $y^3dx + 2x(x - y^2)dy = 0$
11. $(y - xy')^2 x^2 + y^2$
12. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$
13. $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$
14. $(3y^2 - 7x + 7)dy - (3x - 7y - 3)dx = 0$
15. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$
16. $(y^{24} - 3x^2)dy + 2xydy = 0; y(1) = 0$
17. $(x^2 + 2xy - y^2)dy + (y^2 + 2xy - x^2)dx = 0; y(1) = -1$
18. $x dx - y dx = y dy$
19. $y^2 dx + x(x - y)dy = 0$
20. $(x^2 + xy + y^2)dy = x^2 dy$
21. $3(x^2 + 2xy + y^2)dy + x(2x + 3y)dy = 0$
22. $y(2y - x)dy = (x - xy - y^2)dy$
23. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$
24. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(-1) = 0$
25. $xy' = y - \sqrt{y^2 - x^2}$
26. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$
27. $xy' = y \ln \frac{x}{y}$

$$28. (x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

$$29. (x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

$$30. 2(x - y)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

Тема 3.

Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли.

1. Линейные уравнения 1-го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно является уравнением первой степени относительно искомой функции и ее производной.

Любое линейное уравнение первого порядка при помощи алгебраического преобразования может быть приведено к виду:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

в котором чаще всего записывают линейное дифференциальное уравнение.

Существует несколько (по существу равносильных) приемов решения линейного дифференциального уравнения. Мы изложим прием Иоганна Бернулли. Он основан на простом замечании, что любую величину h (переменную или постоянную) можно представить в форме произведения двух сомножителей

$$h = uv$$

причем один из них (например, v) можно выбрать по своему желанию (но отличным от нуля). Например, в равенстве

$$tgx = uv$$

мы можем взять $v = e^x$, или $v = \ln x$, или $v = \arcsin x$, или $v = \sqrt{1 - x^2}$ и т.п.

Соответственно этому придется взять $v = e^x tgx$ или $u = \frac{tgx}{\ln x}$, или $u = \frac{tgx}{\arcsin x}$,

или $u = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Покажем, как это соображение можно использовать для решения линейного дифференциального уравнения.

Представим (неизвестное нам!) решение y уравнения (1) в форме

$$y = uv \quad (2)$$

причем пока не используем своего права выбора v . Подставляя (2) в (1), находим

$$u'v + u[v' + p(x)v] = f(x) \quad (3)$$

Теперь реализуем свое право выбора v , взяв его так, чтобы оказалось

$$v' + p(x)v = 0 \quad (4)$$

Для этого надо рассмотреть (4) как дифференциальное уравнение относительно v и решить его. В (4) отделяются переменные

$$\frac{dv}{v} + p(x)dx = 0$$

Отсюда

$$\ln v + \int p(x)dx = C$$

Беря $C = 0$ и понимая под $\int p(x)dx$ какую-нибудь одну первообразную для $p(x)$ (этого достаточно, ибо в качестве v мы можем взять любое частное решение уравнения (4), кроме $v = 0$), найдем сначала $\ln v$, а затем и саму функцию v . В результате получится

$$v = A(x) \quad (5)$$

где $A(x)$ какая-то (известная!) функция. Подставляя (5) в (3), получим (на основании (4))

$$u'A(x) = f(x)$$

Значит,

$$u' = \frac{f(x)}{A(x)}$$

Откуда интегрированием найдем u :

$$u = B(x) = C$$

Отсюда из (2) и (5) получим

$$y = [B(x) + C]A(x)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 2 \sin x$$

Решение. Делаем замену

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv'$$

и получаем

$$u'v + uv' - \operatorname{tg} x uv = 2 \sin x$$

или

$$u'v + u(v' - \operatorname{tg} x \cdot v) = 2 \sin x$$

Полагаем

$$v' - \operatorname{tg} x \cdot v = 0$$

или

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx$$

т.е.

$$\ln v = -\ln \cos x$$

Потенцируя, получаем:

$$v = \frac{1}{\cos x}$$

Подставляя это значение v в уравнение

$$u'v = 2 \sin x$$

имеем

$$u \cdot \frac{1}{\cos x} = 2 \sin x$$

или

$$u' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

т.е.

$$u' = \sin 2x$$

значит

$$u = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

Находим общее решение данного в примере уравнения в виде

$$y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}$$

□

Пример 2. Решить уравнение: $(x + 2y\sqrt{y} \cos y)y' - 2y = 0$

Решение. На первый взгляд оно принадлежит к рассматриваемому типу.

Однако, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, умножив уравнение на dx и разделив на dy ,

придадим ему вид

$$x = 2y\sqrt{y} \cos y - 2y \frac{dx}{dy} = 0$$

Это линейное уравнение, если принять y за независимую переменную, а x за искомую функцию. Приводя уравнение к виду (1), получим

$$x'_y - \frac{x}{2y} = \sqrt{y} \cos y$$

Дальнейшее ясно: полагая $x = uv$, дадим уравнению вид

$$u'_y v + u \left[v'_y - \frac{v}{2y} \right] = \sqrt{y} \cos y$$

положив

$$v'_y - \frac{v}{2y} = 0$$

находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{2y}$$

откуда

$$v = \sqrt{y}$$

значит,

$$u'_y \sqrt{y} = \sqrt{y} \cos y$$

и потому

$$u = \sin y + C$$

Таким образом,

$$x = (\sin y + C)\sqrt{y}$$

Это общий интеграл нашего дифференциального уравнения. Найти из него y мы, правда, не умеем, но, как уже отмечалось, мы считаем предложенное дифференциальное уравнение решенным. Изложенный прием перемены ролей x и y рекомендуется запомнить.

Задача. Зная, что сила тока I и электродвижущая сила E в цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L связаны соотношением

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

найти силу тока в момент t . Положить E постоянной, а силу тока в начальный момент равной нулю, т.е. $I(0) = 0$.

Решение. Разрешим наше уравнение относительно производной:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \quad (2)$$

Ясно, что мы имеем линейное неоднородное уравнение относительно функции $I(t)$. Решим его подстановкой $I = u(t)v(t)$. Дифференцируя эту подстановку и подставляя (2), получим:

$$\frac{dI}{dt} = u'v + uv' \qquad u'v + uv' + \frac{R}{L} uv = \frac{E}{L}$$

или

$$u'v + u \left(v' + \frac{R}{L} v \right) = \frac{E}{L}$$

Подбираем функцию $v(t)$ так, чтобы

$$v' + \frac{R}{L} v = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L} dt$$

Его интегрирование дает

$$\ln|v| = -\frac{R}{L}t, \quad v = \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Учитывая найденное значение v в предыдущем уравнении, получим:

$$e^{-\frac{R}{L}t} u' = \frac{E}{L} \quad du = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

Интегрируя это равенство, запишем:

$$u = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

Следовательно,

$$I = \left(C + \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Учитывая начальное условие $I(0) = 0$, найдем значение произвольной постоянной:

$$0 = C + \frac{E}{R}, \quad C = -\frac{E}{R}$$

Окончательно получим:

$$I = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

2. Уравнение Бернулли.

Близким к классу линейных уравнений является обобщенное линейное уравнение (уравнение Бернулли):

$$y' + a(x)y = f(x)y^\alpha \quad (1)$$

которое преобразованием функции сводится к линейному.

Здесь $a(x), f(x)$ - заданные непрерывные функции, а α - данное действительное число, которое предполагается отличным от 0 и 1, так как при $\alpha = 1$ становится линейным неоднородным, а при $\alpha = 0$ линейным однородным уравнением. Очевидно также, что при $\alpha > 0$ уравнение имеет тривиальное

решение $y = 0$, а при $\alpha < 0, y \neq 0$.

Уравнение решается заменой

$$z = y^{-\alpha+1}$$

очевидность которой проявляется, если разделить обе части уравнения (1)

на y^α :

$$y^\alpha y' + a(x)y^{-\alpha+1} = f(x)$$

Дифференцируя нашу подстановку $z' = (-\alpha + 1)y^\alpha y'$ и учитывая это в последнем уравнении, имеем:

$$\frac{z'}{-\alpha + 1} + a(x)z = f(x) \quad z' + (-\alpha + 1)z = (-\alpha + 1)f(x)$$

Получили линейное неоднородное уравнение.

Полагая $z = uv$, можно получить его общее решение. Проведем эти выкладки:

$$z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + (-\alpha + 1)a(x)uv = (-\alpha + 1)b(x)$$

$$u'v + u[v' + (-\alpha + 1)a(x)v] = (-\alpha + 1)b(x)$$

Полагая

$$v' + (-\alpha + 1)a(x)v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -(-\alpha + 1)a(x)dx$$

После интегрирования получим:

$$v = A(x) \quad (C = 0),$$

Где $A(x)$ какая-то (известная!) функция.

Тогда

$$u'(x)A(x) = (-\alpha + 1)f(x)$$

или

$$u = B(x) + C$$

Следовательно,

$$z = A(x)[B(x) + C]$$

Проведя обратную замену $y = \sqrt[1-\alpha]{z}$, получим:

$$y = \sqrt[1-\alpha]{A(x)[B(x) + C]} \quad (2)$$

Это и есть общее решение уравнения (1).

Естественно, что запоминать и пользоваться этой формулой для решения уравнения Бернулли нецелесообразно. Эта формула дает возможность провести исследование проведения решения (1) при различных значениях α и C .

Например, при $\alpha < 0$ мы имеем показатель корня $1-\alpha > 1$ и, следовательно, $y \neq 0$ (т.е. $y = 0$ не является решением уравнения Бернулли при $\alpha < 0$). А при $\alpha > 0$ имеем $y = 0$.

При решении уравнения Бернулли нет необходимости пользоваться готовой формулой (2) проще, как указано выше, превратить его в линейное уравнение.

Пример. Решить уравнение

$$8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$$

Решение. Ясно, что это уравнение Бернулли с $a = -3$. Умножая обе части на y^3 и вводя замену $z = y^4, z = 4y^3y'$, получим

$$2xz' - z = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Это уже линейное неоднородное уравнение, которое решим методом подстановки $z = uv$. Имеем:

$$2xu'v + 2xuv' - uv' = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$2xu'v + u(2xv' - v) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Подбираем функцию v так, чтобы $2xv' - v = 0$, т.е.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x} \quad \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x| \quad v = \sqrt{x}$$

Следовательно,

$$2x\sqrt{x}u' = -\frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad du = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

Интегрируя, получим

$$u = -\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

Чтобы вычислить интеграл в правой части, введем подстановку

$$\sqrt{x^2 + x} = t + x, \quad x^2 + x = t^2 + 2tx + x^2$$

тогда

$$x = \frac{t^2}{1-2t}, \quad dx = \frac{2t(1-t)}{(1-2t)^2} dt$$

Проведем вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} -\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}} &= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = C + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - x}} C + \frac{\sqrt{x^2 + x + x}}{x} = \\ &= C + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + 1 = \bar{C} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Поэтому

$$u = \bar{C} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

Отсюда

$$z = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

Обратной заменой переменных $z = y^4$ получим окончательно

$$y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

Это общее решение исходного уравнения.

Задача. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен квадрату ординаты точки касания.

Решение. Графическая иллюстрация дана на рис.

По условию задачи $|OA| = |BM|^2$. Но $|BM| = y$ а отрезок $|OA|$ находим из

уравнения касательной, проведенной в точке $M(x, y): Y - y = y'(X - x)$, полагая здесь $X = 0$ (так как касательная проходит через точку $A(0, Y)$). Получаем $Y = y - y'x$ т.е. $|OA| = y - y'x$.

Дифференциальное уравнение нашей задачи будет иметь вид

$$y^2 = y - y'x$$

т.е.

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$$

получим уравнение Бернулли ($a = 2$). Разделив на y^2 и введя подстановку $z = y^{-1}$, получим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Решая его методом Лагранжа, имеем

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 0 \qquad \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{x} = 0$$

Интегрируя, получим

$$\ln|z| + \ln|x| = \ln|C|; \qquad z = \frac{C}{x}$$

Полагая здесь $C = C(x)$, будем искать решение нашего неоднородного уравнения в виде

$$z = \frac{C(x)}{x}$$

Дифференцируя и подставляя результат в уравнение (1), имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C'x - C}{x^2} = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2};$$

$$\frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}$$

т.е. $C' = 1$, $C = x + \bar{C}$. Следовательно, общее решение уравнения (1) будет

$$z = \frac{1}{x}(\bar{C} + x)$$

Замечая, что $z = y^{-1}$, получаем

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}(C + x) \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{x}{C + x}$$

Это и есть общее решение уравнения нашей задачи.

Искомые кривые, как нетрудно видеть, гиперболы (при $C = 0$ прямая $y = 1$). Кроме того, решением является и прямая $y = 0$ (тривиальное решение). Прямые $y = 0$ и $y = 1$ обладают требуемым свойством.

Задания для практических занятий к теме 3.

Найти общее решение уравнений

1. $y' + y = 2e^x$
2. $xy' = y - 2x^2$
3. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$
4. $2ydx + \left(\frac{3}{y} - x\right)dy = 0$
5. $x(4 - x^2)y' = 2x^2y + 1$
6. $xy' = x^2 + y$
7. $y' = \frac{y}{x} - x$
8. $(x + y)dx = xdy$
9. $2x^3y' = 2x^2y - 3$
10. $ydx - (x + y^2)dy = 0$
11. $xy' + 2y = 3x, y(-1) = 1$
12. $x^2y' = 5xy + 6, y(1) = 1$
13. $xy' = 7y + x^4, y(1) = -\frac{1}{3}$
14. $xy' = 5y + 3x^2, y(-1) = -1$
15. $2x^2y' + xy = 2y^3$
16. $xy' + 4y = 3xy^2$

$$17. y' - \frac{y}{x} = y^2$$

$$18. xy' = 2y - 4x^2y^2$$

$$19. y' - y + 2xy^3 = 0$$

$$20. xy' + 3xy^2 = 2y$$

$$21. y' - y + 4xy^3 = 0$$

$$22. y' + y \operatorname{tg} x + 4y^2 \sin x = 0$$

Ответы к задачам

$$1. y = Ce^{-x} + e^x$$

$$2. y = Cx - 2x^2$$

$$3. xy = C + \ln|y|, y = 0$$

$$4. x = C\sqrt{y} + \frac{1}{y}$$

$$5. y = \frac{C + \ln|x|}{4 - x^2}$$

$$6. y = Cx + x^2$$

$$7. y = Cx - x^2$$

$$8. y = Cx + x \ln|x|, x = 0$$

$$9. y = Cx + \frac{1}{2x^2}$$

$$10. x = Cy + y^2, y = 0$$

$$11. y = x + \frac{2}{x^2}$$

$$12. y = 2x^5 - \frac{1}{x}$$

$$13. y = -\frac{1}{3}x^4$$

$$14. y = -x^2$$

$$15. \frac{1}{y^2} = Cx + \frac{1}{x}$$

$$16. \frac{1}{y} = Cx^4 + x$$

$$17. \frac{1}{y} = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$$

$$18. \frac{1}{y} = \frac{C}{x^2} + x^2$$

$$19. \frac{1}{y^2} = Ce^{-2x} + 2x - 1$$

$$20. \frac{1}{y} = \frac{C}{x^2} + x$$

$$21. \frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^2} + 4$$

$$22. \frac{1}{y} = \frac{C}{\cos x} - 2 \cos x$$

Варианты контрольных заданий к теме 3.

$$1. y' + 2y = x^2 + 2x$$

$$2. (x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$$

$$3. x \ln x \cdot y' - y = x^3(3 \ln x - 1)$$

$$4. (1 - x^2)y + xy = 1$$

$$5. 2xy' - y = 3x^2$$

$$6. (x + 1)dy - [2y + (x + 1)^4]dx = 0$$

$$7. (x \sin y + 2 \sin 2y)y' = 1$$

$$8. y' - 2xy = 2xe^{x^2}$$

$$9. x(x^2 + 1)y' + (x^2 - 1)y = 1$$

$$10. y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x; y(0) = 1$$

$$11. x \ln x \cdot y' - (1 + \ln x)y + \frac{\sqrt{x}(2 + \ln x)}{2} = 0$$

$$12. 3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$$

$$13. xy(1 + xy^2)y' = 1$$

$$14. x^2(y' + 2xy) = y^2(1 + 2x^2)$$

$$15. (x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$$

$$16. xy' + 3y = x^2$$

$$17. (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

$$18. y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$19. y' \sin x - y = 1 - \cos x$$

$$20. (y^2 - 6x)y' + 2y = 0$$

$$21. (x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$$

$$22. xy' + y = y^2 \ln x$$

$$23. y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

$$24. (1 - x^2)y' - xy = xy^2$$

$$25. 3y^2 y' - y^3 = x + 1$$

$$26. y^{10}(y' + y) = x$$

$$27. y(1 - y)dx + (x + y)dy = 0$$

$$28. dx + (x = y^2)dy = 0$$

$$29. xy(1 - xy^2)y' = 1$$

$$30. (x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$$

Тема 4.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Уравнения в полных дифференциалах.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Выше мы ознакомились с различными типами дифференциальных уравнений первого порядка, которые интегрируются в квадратурах. Но рассмотренными уравнениями далеко не исчерпываются различные уравнения 1-го порядка, и

класс этих уравнений, интегрирующихся в квадратурах, очень узок. В связи с этим большое значение приобретают приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

Естественно, чтобы применить какой-либо метод приближенного интегрирования, необходимо быть уверенным в существовании (а также и в единственности) этого решения.

Поэтому основополагающей во всей теории обыкновенных дифференциальных уравнений является теорема Пикара (теорема существования и единственности решения, или иначе теорема Коши-Липшица).

Итак, дано уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

Определенное в области D :

$$D: \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

и начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2)$$

Теорема (существования и единственности).

Пусть правая часть дифференциального уравнения (1) такова, что:

1) $f(x, y)$ есть непрерывная функция по совокупности аргументов в области D , а следовательно, и ограниченная там, т.е.,

$$|f(x, y)| \leq M; \quad (3)$$

2) $f(x, y)$ удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y , т.е., существует такое число $L > 0$, что $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ и любых двух значений $\bar{y}$ и $\underline{y}$

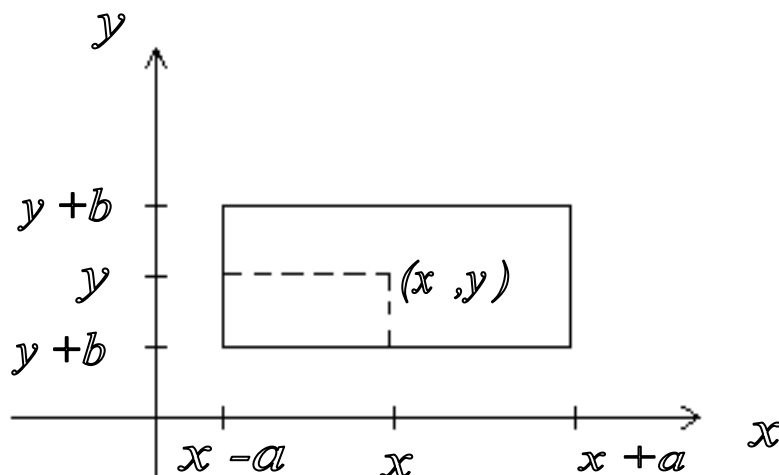
переменной $y, |\bar{y} - y_0| \leq b, |\underline{y} - y_0| \leq b$, справедливо неравенство

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \underline{y})| \leq L|\bar{y} - \underline{y}|.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) $y = y(x)$, определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\{a, b/M\}$.

Без доказательства.

Замечание 1. Дадим геометрическую картину области D , которая может быть любой ограниченной, замкнутой и выпуклой по y



Замечание 2. Из того, что $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , следует существование постоянной $M > 0$, удовлетворяющей условию (3) (теорема Вейерштрасса).

Замечание 3. Перепишав условие Липшица в форме

$$\frac{|f(x, \bar{y}) - f(x, \underline{y})|}{|\bar{y} - \underline{y}|} \leq L$$

Видим, что относительное приращение функции $f(x, y)$ и аргумента y во всех точках D ограничено величиной L .

На практике обычно условие Липшица заменяют более удобным требованием ограниченности частной производной по y

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L \quad (4)$$

где за постоянную L можно принять верхнюю грань $|f'_y|$, т.к. по теореме о конечных приращениях

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f'_y(x, \eta)| \cdot |y_2 - y_1|, \quad (y_1 < \eta < y_2)$$

Следует помнить, что условие (4) есть только достаточное условие выполнимости условия Липшица.

Замечание 4. Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений (метод Пикара), который можно использовать и для приближенного решения задачи Коши. Приближения ищутся по формулам:

$$y_0; \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пример. При каких ограничениях линейное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Решение. Первое условие теоремы – непрерывность правой части уравнения (1) $f(x, y)$ в нашем случае $f(x, y) = q(x) - p(x)y$. Это условие выполнено, если на рассматриваемом отрезке изменения $x, a \leq x \leq b$, функции $p(x)$ и $q(x)$ являются непрерывными. Автоматически тогда выполняется и второе условие теоремы существования и единственности, так как

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$$

а $p(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$ и, следовательно, ограничена по модулю.

Следовательно, если $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то через каждую точку (x_0, y_0) , где $x_0 \in [a, b]$, а y_0 – произвольно, проходит единственная интегральная кривая нашего уравнения.

Пример. Найти несколько последовательных приближений $y_1, y_2, \dots$ к решению уравнения $y' = -y^2 + x^2$, при начальных условиях: $y(0) = 0$.

Решение. Имеем $y_0(x) = 0$. Далее, по формуле (5)

$$y_1(x) = \int_0^x \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\tau^2 - \frac{\tau^6}{9} \right) d\tau = \left(\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^7}{7 \cdot 9} \right) \Big|_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}$$

Выясним, на каком отрезке находятся эти последовательные приближения.

Пусть первая часть нашего уравнения задана в квадрате $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Тогда $|f'_y| = |-2y| \leq 2$. А наибольшее значение функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ на этом квадрате $M = \max |x^2 - y^2| = 1$. Следовательно,

$$h = \min \{1, 1\} = 1$$

т.е., последовательные приближения сходятся на отрезке $[-1, 1]$.

2. Уравнения в полных дифференциалах.

Напомним предварительно определения функции двух переменных; ее частных производных и полного дифференциала.

Определение. Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y , из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z , то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y , определенная в области D . Символически функция двух переменных обозначается так:

$$z = f(x, y) \quad u = u(x, y) \text{ и т.д.}$$

Например $u = 2x - y$, или $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \dots$

Определение. Совокупности пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения или областью существования этой функции.

Например первая из предыдущих функций имеет смысл при любых значениях x и y . Следовательно, естественной областью определения ее является вся плоскость O_{xy} , а вторая из них имеет смысл лишь при $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Все точки $M(x, y)$ координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

Определение. Частной производной по x от функции $u = u(x, y)$ называется производная по x , вычисленная в предположении, что y - постоянная. Частной

производной по y от функции $u = u(x, y)$ называется производная по y , вычисленная в предположении, что x - постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами вычисления производных для функций одной переменной, и только требуется каждый раз помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример. Дана функция $u = x^2 \cdot \sin y$, требуется найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin y$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \cos y$

Пример. $z = x^y$ здесь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Определение. Пусть дана функция $u = u(x, y)$, причем все частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в точке (x, y) . Тогда выражение $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ называется полным дифференциалом функции $u = u(x, y)$.

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^2 \cdot \sin y$.

Решение. Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \cos y$ и они непрерывны при всех значениях x и y , находим:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2x \sin y dx + x^2 \cos y dy$$

Рассмотрим снова уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Или с учетом $y' = \frac{dy}{dx}$ уравнение более общего вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть его представляет собой полный дифференциал некоторой функции

$u(x, y)$.

При изучении этой темы необходимо ответить себе на следующие вопросы.

а) является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах?

б) если да, то какой найти функцию $u(x, y)$, полным дифференциалом которой является левая часть нашего уравнения?

в) если функция $u(x, y)$ найдена, то какое отношение она имеет к решению нашего уравнения (2)?

г) если данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, то нельзя ли как-либо привести его к виду уравнения в полных дифференциалах?

Ответы на эти четыре вопроса и составляют суть этой темы.

Заметим, при $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ к уравнению (2) в точке (x_0, y_0) неприменима теорема существования и единственности. Эта точка является особой точкой уравнения (2), следовательно, поведение интегральных кривых в окрестности этой точки исследуется соответствующими методами.

В области, не содержащей особых точек, вопрос существования и единственности решения уравнение (2) можно исследовать, приведя его к уравнению вида (1) и применив к последнему соответствующую теорему существования и единственности.

Если известно, что левая часть уравнения (2) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ (т.е. уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах):

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)$$

то, зная функцию $u(x, y)$, мы можем легко ответить на третий из выше поставленных вопросов. А именно,

$$u(x, y) = C \tag{3}$$

является общим интегралом уравнения (2), так как из того, что $du(x, y) = 0$, следует, $u(x, y) = C$. Если же даны начальные значения $y(x_0) = y_0$. То

произвольную постоянную C находят из равенства $u(x_0, y_0) = C$ и частный интеграл примет вид

$$u(x, y) = u(x_0, y_0).$$

Далее, предполагаем $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывными вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

в некоторой области. Нетрудно доказать, что необходимым и достаточным условием того, что левая часть (2) является полным дифференциалом, будет

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4)$$

Доказательство этого факта можно найти в любой из рекомендованной литературы. В процессе доказательства мы получаем общий интеграл дифференциального уравнения (2):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \quad (5)$$

В этой формуле за первообразную взята такая функция $u(x, y)$, которая в точке (x_0, y_0) обращается в нуль. Саму же точку (x_0, y_0) мы можем выбирать в заданной области произвольно (лишь бы она не являлась особой).

Итак, на вопросы в пунктах а), б), в) мы имеем ответы.

Пример. Решить уравнение

$$(x^2 + 6xy - 2y)dy + (2xy + 3y^2)dx = 0$$

Решение. При интегрировании уравнения в полных дифференциалах не обязательно пользоваться готовыми формулами типа (5). Можно искать функцию $u(x, y)$ постепенно, пользуясь значением ее частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Выясним, прежде всего, является ли наше уравнение уравнением в полных дифференциалах. Так как

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2$$

$$N(x, y) = x^2 + 6xy - 2y$$

то получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y \quad \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, уравнение в полных дифференциалах.

Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 2y \quad (*)$$

Интегрируя первое из неравенств (*), считая y постоянным, получим:

$$u = \int_0^x (2\tau y + 3y^2) d\tau + C(y) = x^2 y + 3y^2 x + C(y)$$

Функцию $C(y)$ подбираем так, чтобы удовлетворить второму из равенств (*):

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + 3y^2 x + C(y)) = x^2 + 6xy - 2y$$

т.е.

$$x^2 + 6xy + C'(y) = x^2 + 6xy - 2y$$

Отсюда

$$C'(y) = -2y \Rightarrow dC(y) = -2y dy \Rightarrow C(y) = -y^2$$

Итак,

$$u(x, y) = x^2 y + 3y^2 x - y^2$$

а решение исходного уравнения

$$x^2 y + 3xy^2 - y^2 = C.$$

Если же тождество (4) не выполнено, т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

то уравнение (2) не является уравнением в полных дифференциалах.

Оказывается, за счет умножения обеих частей уравнения (2) на функцию $\mu(x, y)$

иногда удастся привести левую часть (2) к полному дифференциалу. Такая

функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Необходимо рассмотреть вопрос, когда существует интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y (см. рекомендованную литературу).

Задания для практических занятий к теме 4.

1. Методом последовательных приближений найти приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению задачи Коши. Если:

а) $y' = y^2 - x, y(0) = 1$

б) $y' = y^2 + x^3, y(0) = 0$

в) $y' = 2y^2 + x, y(0) = 1$

г) $y' = x^2 - 2y^3, y(0) = 0$

2. Решить уравнение.

1. $(1 + 3x^2 \ln y)dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$

2. $\left(2x - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(2y + \frac{\sin 2y}{x}\right)dy = 0$

3. $\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y\right)dy = 0$

4. $e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0$

5. $\frac{y}{x}dx + [1 + \ln(xy)]dy = 0, x > 0, y > 0$

6. $\left(1 + \frac{2x}{y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

Ответы к задачам.

1. $x^3 \ln y + x + y^3 = C$

2. $x^2 + y^2 + \frac{\sin^2 y}{x} = C$

3. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - y^2 = C$

$$4. y + xe^{\frac{y}{x}} = C$$

$$5. y \ln(xy) = C$$

$$6. x + \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

Варианты контрольных заданий к теме 4.

В некоторых из этих уравнений, для облегчения их решения, указано, в каком виде надо искать интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, чтобы данное уравнение стало уравнением в полных дифференциалах.

$$1. x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$$

$$2. 3x(x + 2y^2)dx + 2y(3x^2 + 2y^2)dy = 0$$

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$$

$$4. \left(3x^2 \operatorname{tg} y + \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 - \frac{3y^2}{x^2} \right) dy = 0$$

$$5. \left(2x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right) dy$$

$$6. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$

$$7. (3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$

$$8. \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x} \right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x \right) dy = 0$$

$$9. \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

$$10. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

$$11. \frac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)} dx + \left[\frac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y \right] dy = 0$$

$$12. [3\cos(3x + 2y) - 2\sin(2x + 3y)]dx + [2\cos(3x + 2y) - 3\sin(2x + 3y)]dy = 0$$

$$13. y(x^2 + y^2 + 1)dx + x(x^2 + y^2 - 1)dy = 0$$

$$14. (1 - 3x^2 - y^2)dx = (x^2 - 3y^2)dy$$

$$15. (y^2 + 2x^2)dx + 2xydy = 0$$

$$16. [(x - y)^2 - x]dx + [y - (x - y)^2]dy = 0$$

$$17. (y - \sin x)dx + (x + e^2)dy = 0$$

$$18. (y - x)dx + (x + 2e^{2y})dy = 0$$

$$19. (x + y)dx = (2e^{2x} - y)dy$$

$$20. (y + \sin x)dx + (x + \cos y)dy = 0$$

$$21. (2x + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$$

$$22. (y^2 - 2x)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$$

$$23. (y - x^2 + 1)dx + (x + \ln y)dy = 0$$

$$24. (y^2 + \ln x)dx + (2xy - \ln y)dy = 0$$

$$25. (e^2 + y)dx + (x + 2y \cos y^2)dy = 0$$

Тема 5.

Уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной.

Неполные уравнения. Общий метод введения параметра.

Уравнения Лагранжа и Клеро.

1. Уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной.

Все уравнения, которые мы рассматривали выше, были уравнениями, разрешенными относительно производной. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной будет:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Универсального метода интегрирования нет даже для произвольного уравнения, разрешенного относительно производной, а для уравнения вида (1) — тем более.

При изучении этой темы следует внимательно разобраться с ситуацией,

которая возникает при разрешении уравнения (1) относительно y' (если это возможно) и с получающимися затем решениями последних уравнений.

Покажем это на примере.

Пример. Решить уравнение.

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0. \quad (2)$$

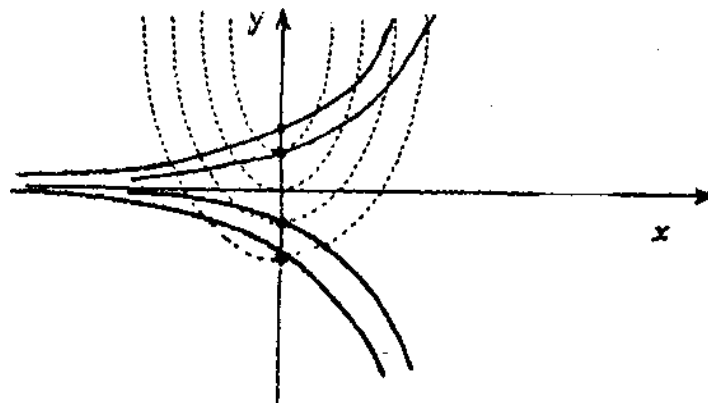
Решение. Это уравнение типа (1). Ясно, что оно является квадратным относительно y' . Решая его по соответствующей формуле (относительно y'), получим два уравнения $y' = x$ и $y' = y$. Соответственно, решения каждого из них будут:

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad (3)$$

и

$$y = Ce^x \quad (4)$$

Построим на одном и том же рисунке их графики



Легко убедиться, что оба семейства (3) и (4) удовлетворяют уравнению (2).

Но кроме (3) и (4) гладкой интегральной кривой (т.е. имеющей в каждой своей точке непрерывную производную) является также кривая, составленная

из дуги интегральной кривой семейства (3) и дуги интегральной кривой свойства (4).

2. Неполные уравнения.

п.1. Уравнения, содержащие только производную. Это уравнения вида

$$F(y') = 0. \quad (1)$$

Полагая, что это уравнение имеет некоторое число вещественных решений:

$$y' = R_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

имеем тождество

$$F(R_i) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Интегрируя (2), получим: $y = R_i x + C,$ (4)

Откуда

$$R_i = \frac{y-c}{x}.$$

Подставляя это значение R_i в (3), имеем

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0 \quad (5)$$

Это и есть общий интеграл уравнения (1).

Пример. Решить уравнение $y'^3 - 1 = 0$.

Решение.

Вещественное решение исходного уравнения:

$$y' = 1 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow y = x + c \Rightarrow 1 = \frac{y-c}{x}.$$

Следовательно $\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 1 = 0$

есть общий интеграл исходного уравнения.

n.2. Уравнения, не содержащие искомой функции.

Это уравнения вида

$$F(x, y') = 0. \quad (1)$$

Пусть (1) разрешимо относительно y' , так что $y' = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots)$ (2)

Тогда совокупность общих решений (2) $y = \int f_i(x) dx + c \quad (i = 1, 2, \dots)$

дает общий интеграл уравнения (1).

Если (1) не разрешимо относительно y' , но параметризуемо, т.е. найдутся такие

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t),$$

что

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Тогда, используя основное дифференциальное соотношение

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx,$$

имеем: $dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$

Отсюда $y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + c$ и общее решение (1) в параметрической форме имеет

вид $y = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c.$

Если (1) разрешимо относительно x , т.е. $x = \varphi(t), \quad (4)$

то, полагая $y' = t$, получаем параметрическое представление:

$$x = \varphi(t), \quad y' = t, \quad (5)$$

Отсюда

$$dy = t dx \Rightarrow dy = t \cdot \varphi'(t) dt,$$

Интегрируя последнее, имеем $y = \int t \varphi'(t) dt + c, \quad y = \varphi(t),$

т.е. опять решение в параметрической форме.

Пример. Решить уравнение

$$x - \ell^{y'} + y' = 0$$

Решение. Имеем

$$x = \ell^{y'} - y'.$$

Представим его в параметрической форме:

$$y' = t, \quad x = \ell^t - t.$$

Тогда $dy = y'dx = t(\ell^t - 1)dt$, $y = \int t(\ell^t - 1)dt + C = (t-1)\ell^t - \frac{t^2}{2} + C$.

Общим решением исходного уравнения в параметрической форме будет

$$x = \ell^t - t, \quad y = (t-1)\ell^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

п.3. Уравнения, не содержащие независимой переменной.

Это уравнения вида

$$F(y, y') = 0. \tag{1}$$

Пусть оно разрешимо относительно y' , что $y' = f_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots$)

Тогда $\int \frac{dy}{f_i(y)} = x + c$ ($i = 1, 2, \dots$)

есть общий интеграл (1).

Если же (1) не разрешимо относительно y' , но допускает параметризацию

$$y = \varphi(t), \quad y' = \varphi'(t),$$

то, используя основное соотношение $dy = y'dx$, получим $\varphi'(t)dt = \psi(t)dx$,

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C.$$

Итак

$$y = \varphi(t), \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C$$

есть решение в параметрической форме.

Например, если (1) разрешимо относительно y , т.е.

$$y = \varphi(y'),$$

то имеем параметризацию, $y = \varphi(t)$, $y' = t$ и общее решение в параметрической форме будет ($dy = y'dx$)

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \quad y = \varphi(t),$$

Пример. Решить уравнение

$$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2.$$

Решение. Полагая $2 - y' = y \cdot t$ имеем $y^2(y' - 1) = y^2 t^2$, ($y \neq 0$)

$$y' - 1 = t^2, \quad y' = 1 + t^2.$$

$$\text{Тогда } y' = \frac{2 - y'}{t} = \frac{2 - 1 - t^2}{t} = \frac{1 - t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

Итак, имеем следующую параметризацию

$$y = \frac{1}{t} - t, \quad y' = 1 + t^2.$$

$$\text{Тогда } (dy = y'dx) \quad \left(\frac{1}{t} - t\right)' dx = (1 + t^2) dx,$$

$$\text{или } dx = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)' dt \times (1 + t^2) dx, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x = \frac{1}{t} + C.$$

и так общее решение в параметрической форме имеет вид

$$x = \frac{1}{t} + c, \quad y = \frac{1}{t} - t,$$

$$\text{Или исключая параметр } t: \quad y = x - c \frac{1}{x - c}.$$

3.Общий метод введения параметра.

n.1. Рассмотрим теперь полное уравнение общего вида $F(x, y, y') = 0$. (1)

Допустим, что оно параметризуемо

$$x = \alpha(u, v), \quad y = \beta(u, v), \quad y' = \gamma(u, v) \quad (2)$$

так что

$$F(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) \equiv 0$$

при всех значениях параметров u и v .

Из (2) имеем

$$dx = \frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv, \quad y = \gamma(u, v).$$

Подставляя все эти соотношения в равенство

$dy = y' dx$, получим

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv = \gamma(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv \right).$$

Полагая здесь u независимой переменной, а v функцией от u получим

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \quad (3)$$

Найдя его решение (если это возможно) получим

$$v = \omega(u, c).$$

Подставляя это в первые два из уравнений (2), получим общее решение уравнения (1) в параметрической форме:

$$x = \alpha(u, \omega(u, c)), y = \beta(u, \omega(u, c)).$$

н.2. Практическое применение изложенного выше метода связано с преодолением двух трудностей: а) нахождение параметрического представления уравнения (1) и б) интегрированием уравнения (2).

Если (1) разрешимо относительно искомой функции первая трудность легко преодолевается. Действительно, пусть из (1) имеем

$$y = \varphi(x, y') \quad (4)$$

Тогда полагая, $y' = p$ получим $y = \varphi(x, p)$, $y' = p$, (5)

т.е. параметрическое представление (4).

Из соотношения $dy = y' dx$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = p \cdot dx.$$

Полагая здесь $p = p(x)$ получим $\frac{dp}{dx} = \frac{p \varphi' / \partial x}{\partial x / \partial p}$.

Его решение (если удастся найти) будет $p = \omega(x, c)$.

Учитывая это в (5) получим общее решение (4):

$$y = \varphi(x \omega(x, c)).$$

н.3. Если уравнение (1) разрешимо относительно x , т.е.

$$x = \varphi(y, y') \quad (6)$$

то полагая $y' = p$,

имеем:

$$x = \varphi(y, p), \quad y' = p, \quad \text{т.е. (6) параметризованное.}$$

Тогда из соотношения $dy = y' dx$, подставляя вместо y' и dx их значения получим

$$y' = p, \quad dx = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp \right)$$

$$dy = p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp \right).$$

Полагая здесь $p = p(y)$ имеем

$$p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \right) = 1,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

После преобразований

$$\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Его решение (если удастся найти его)

$$p = \omega(y, c).$$

Тогда общий интеграл (6)

будет

$$x = \varphi(y, \omega(y, c)).$$

Замечание. Необходимо отметить, что в ряде выше рассмотренных случаях появляются еще и особые решения. Их рассмотрение мы опускаем.

4. Уравнения Лагранжа и Клеро.

а) Рассмотрим уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \quad (1)$$

где y является линейной функцией от x , а коэффициенты есть функции зависящие от y' .

Это *уравнение Лагранжа*, которое интегрируется в квадратурах.

Полагая $y' = p$ получим:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad y' = p. \quad (2)$$

Подставим в соотношение $dy = y'dx$ значения из (2):

$$\begin{aligned} \varphi'(p)dp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp &= pdx, \\ (\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Разделим обе части (3) на $\varphi(p) - p$ ($\varphi(p) - p \neq 0$):

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (4)$$

Полученное уравнение есть линейное дифференциальное уравнение относительно x .

Как известно, такие уравнения интегрируются, т.е.

$$x = \alpha(p, c).$$

Учитывая это в (2) получим

$$y = \varphi(p) \alpha(p, c) + \psi(p), \quad x = \alpha(p, c). \quad x = \alpha(p, c).$$

Замечание. Случай $\varphi(p) - p = 0$ здесь не рассматривается.

Пример. Решить уравнение

$$y - xy'^2 = y'^2.$$

Решение. Из данного уравнения имеем

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Полагая $y' = p$, получим

$$y - xp^2 + p^2.$$

Используя $dy = y'dx$, получаем

$$2pxdp + p^2dx + 2pdp = pdx.$$

Или

$$(p^2 - p)dx + 2p(x+1)dp = 0.$$

Разделив обе части на $p^2 - p \neq 0$ получим

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}.$$

Решая это линейное уравнение имеем:

$$x = \frac{c_1}{(p-1)^2} - 1.$$

Учитывая его в исходном уравнении, с учетом $y' = p$ получим

$$y = \frac{c_1}{(p-1)^2} \cdot p^2.$$

Следовательно исходное уравнение имеет решение в параметрической форме:

$$x = \frac{c_1}{(p-1)^2} - 1; \quad y = \frac{c_1}{(p-1)^2} \cdot p^2.$$

в) *Уравнение Клеро*. В случае, когда в уравнении Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$ получаем уравнение

$$y = y' \cdot x + \psi(y')$$

которое и называется уравнением Клеро.

Полагая здесь, как и выше $y' = p$ получим

$$y = px + \psi(p), \text{ откуда } (dy = y' dx)$$

$$pdx + xdp + \psi'(p)dp = pdx,$$

Или

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два: $dp = 0$, $x + \psi'(p) = 0$ (5)

Из первого имеем $p=c$.

Подставляя в исходное уравнение

$(y' = p)$, найдем общее решение уравнения Клеро

$$y = cx + \psi(c),$$

которое является семейством прямых.

Очевидно, что общее решение уравнение Клеро получается формальной заменой y' на c .

Второе уравнение из (5) дает особое решение.

Пример. Решить уравнение

$$y = xy' + \frac{a}{2y'} \quad (a > 0 \text{-параметр}).$$

Решение. Это уравнение Клеро.

Следовательно, его общее решение имеет вид:

$$y = cx + \frac{a}{2c} \quad (c \neq 0).$$

Задания для практических занятий к теме 5

1. $y'^2 - y^2 = 0$.
2. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2$.
3. $y'^2 - 4y^3 = 0$.
4. $xy'^2 = y$.
5. $y^3 + y^2 = yy'(y'+1)$.
6. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.
7. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.
8. $y'^2 + x = 2y$.
9. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.
10. $y'^2 - 2yy' = y_2(e^x - 1)$.
11. $y'^4 + y^2 = y^4$.
12. $x = y'^3 + y$.
13. $x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$.
14. $y = y'^2 + 2y^3$.
15. $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$.
16. $y'^4 - y^2 = y^2$.
17. $y'^4 = 2yy' = y^2$.

Решить уравнения Лагранжа и Клеро

18. $y = xy' - y'^2$.

19. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

20. $y = 2xy' - 4y'^3$.

21. $y = xy' - (2 + y')$.

22. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

23. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

24. $xy' - y = \ln y'$.

25. $xy'(y' + 2) = y$.

26. $2y^2(y - xy') = 1$.

27. $2xy' - y = \ln y'$.

Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

Ответы.

1. $y = Ce^{\pm x}$.

2. $y + x = (x + C)^3$;

3. $y(x + C)^2 = 1$; $y = 0$.

4. $(y - x)^2 = 2C(x + y) - C^2$; $y = 0$.

5. $4y = (x + C)^2$; $y = Ce^x$.

6. $y = Ce^x$; $y = Ce^{-x} + -1$.

7. $x^2 + C^2 = 2Cy$; $y = \pm x$.

8. $\ln|1 \pm 2\sqrt{2y - x}| - 2(x + C \pm \sqrt{2y - x})$; $8y = 4x + 1$.

9. $y = 2x^2 + C$; $y = -x^2 + C$.

10. $\ln Cy = x \pm 2e^{x/2}$; $y = 0$.

11. $\arctgu + \frac{1}{2}\ln|(u - 1)/(u + 1)| = \pm x + C$, где $u = \sqrt[4]{1 - (1/y^2)}$; $y = 0$; $y = \pm 1$.

12. $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + C$.

13. $x = p\sqrt{p^2 + 1}$, $3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C$.

14. $x = 3p^2 + 2p + C, y = 2p^3 + p^2; y = 0.$
15. $x = \ln|p| \pm \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1} \right| \pm 3\sqrt{p+1} + C, y = p \pm (p+1)^{3/2}; y = \pm 1.$
16. $x = \pm \left(2\sqrt{p^2-1} + \arcsin \frac{1}{|p|} \right) + C, y = \pm p\sqrt{p^2-1}; y = 0.$
17. $x = \pm 2\sqrt{1+p^2} - \ln(\sqrt{p^2+1} \pm 1) + C, y = -p \pm p\sqrt{p^2+1}; y = 0.$
18. $y = Cx - C^2; 4y = x^2.$
19. $x\sqrt{p} = \ln p + C, y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C); y = 0.$
20. $x = 3p^2 + Cp^{-2}, y = 2p^3 + 2Xp^{-1}; y = 0.$
21. $y = Cx - C - 2.$
22. $C^3 = 3(Cx - y); 9y^2 = 4x^3.$
23. $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1, y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2; y = 0; y = x - 2.$
24. $y = Cx - \ln C; y = \ln x + 1.$
25. $y = \pm 2\sqrt{Cx} + C; y = -x.$
26. $2C^2(y - Cx) = 1; 8y^3 = 27x^2.$
27. $x p^2 = p + C, y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p.$
28. $xy = \pm^2.$

Варианты контрольных заданий к теме 5.

Варианты заданий

1. $y = (y')^2 e^{y'}.$
2. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}.$
3. $x = \ln y' + \sin y'.$
4. $x = (y')^2 - 2y' + 2.$
5. $y = y' \ln y'.$
6. $y = \arcsin y' + \ln[1 + (y')^2].$

$$7. y = (y' - 1)e^{y'}.$$

$$8. x(y')^2 = e^{\frac{1}{y'}}.$$

$$9. x = [1 + (y')^2] = 1.$$

$$10. x = [1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} = 4.$$

$$11. x(y')^2 = yy' - 1.$$

$$12. x(y')^3 = 2yy' - 4.$$

$$13. x = y' + \sin y'.$$

$$14. y = y'(1 + y' \cos y').$$

$$15. 2y = xy' + y' \ln y'.$$

$$16. y = 2xy' + \ln y'.$$

$$17. y = x(1 + y') + (y')^2.$$

$$18. y = 2xy' + \sin y'.$$

$$19. y = x(y')^2 - \frac{1}{y'}.$$

$$20. y = \frac{3}{2}xy' + ey'.$$

$$21. y = xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

$$22. y = xy' + (y')^2.$$

$$23. x(y')^2 - yy' - y' + 1 = 0.$$

$$24. x = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}.$$

$$25. y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

$$26. x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}.$$

$$27. x = y' + (y')^2.$$

$$28. y' = y\sqrt{1 + (y')^2}.$$

$$29. y = 2xy' - (y')^2.$$

$$30. y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка

Тема 6.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

1. Основные понятия.

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

или, если его разрешить относительно производной:

$$y'' = f(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Определение. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2) называется задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (3)$$

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называется *общим* решением дифференциального уравнения второго порядка, если она удовлетворяет двум условиям:

1) является решением уравнения (1) или (2) при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 ;

2) при любых начальных условиях (3), взятых из области существования и единственности решения уравнения (1), найдутся такие значения произвольных постоянных $C_1 = C_{10} = C_2 = C_{20}$, при которых функция

$$y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$$

удовлетворяет условиям (3)

Определение. Любое решение уравнения (1), получающееся из общего решения при конкретных числовых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 , называется *частным* решением дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим те случаи, когда решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к решению дифференциального уравнения первого порядка.

2. В этом пункте мы рассмотрим дифференциальные уравнения вида:

$$y'' = f(x).$$

Т.к. $y'' = (y')'$, то

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

откуда

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2$$

-общее решение этого дифференциального уравнения.

Пример 3.4. найти общее решение уравнения:

$$y'' = \sin x.$$

Решение.

$$y' = \int \sin x dx + C_1$$

или

$$y' = -\cos x + C_1.$$

Откуда получаем

$$y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

3. В этом пункте мы рассмотрим уравнения вида:

$$F(x, y', y'') = 0,$$

т.е. уравнения, не содержащие в явном виде неизвестную функцию y от x .

Сделаем замену

$$y' = p(x), \text{ откуда } y'' = p'(x).$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$F(x, p, p') = 0,$$

т.е. будет уравнением первого порядка. Найдя общее решение этого уравнения

$$p = \varphi(x, C_1),$$

получим уравнение:

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Решая его получим

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$$

или, обозначив

$$\psi(x, C_1, C_2) = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2, \text{ находим общее решения уравнения (4)}$$

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Вводим новую неизвестную функцию $p(x)$:

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x)$$

и получаем

$$p' - \frac{p}{x} = x$$

-линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Сделаем замену

$$p = u(x) \cdot v(x), \quad p' = u'v + uv':$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x.$$

$$\text{Полагаем } \begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0 & (5) \\ u'v = x. & (6) \end{cases}$$

Решаем уравнение (5)

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

т.е.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Значит (находим частное решение):

$$\ln v = \ln x \text{ или } v = x.$$

Подставляем найденное значение v в уравнение (6) и решаем его:

$$u'x = x \text{ или } u' = 1,$$

т.е.

$$u = x + C_1.$$

Таким образом, получаем

$$p = (x + C_1)x.$$

Далее полагаем

$$y' = (x + C_1)x. \text{ или } y' = x^2 + C_1x.$$

Проинтегрировав это уравнение, получаем общее решение дифференциального уравнения, заданного в этом примере

$$y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2.$$

Замечание. Так как C_1 – произвольная постоянная, то коэффициент при x^2 , равный $C_1/2$, мы можем заменить на C_1 .

4. В этом пункте мы рассмотрим уравнения вида:

$$F(y, y', y'') = 0,$$

т.е. уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную x .

Сделаем замену

$$y' = p(y),$$

т.е. переменную p будем считать сложной функцией от x , где промежуточной переменной будет неизвестная функция от y , т.е. $p = p(y(x))$.

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Таким образом, уравнение (7) принимает вид

$$F\left(y, p, p \cdot \frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

т.е. является дифференциальным уравнением первого порядка.

Решая его, получаем

$$p = \varphi(y, C_1).$$

Отсюда

$$y' = \varphi(y, C_1). \text{ или } \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общий интеграл дифференциального уравнения, заданного в этом примере:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 3.7. решить уравнение:

$$yy'' = (y')^2.$$

Решение. Сделаем замену:

$$y' = p(y'), \quad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

и получим

$$yp \cdot \frac{dp}{dy} = p^2.$$

Рассмотрим два случая:

1) $p = 0$. Тогда, $y' = 0$, следовательно $y = C$ - частное решение.

2) $p \neq 0$. Тогда

$$y \cdot \frac{dp}{dy} = p.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируем это уравнение:

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln C_1 \quad \text{или} \quad p = C_1 y.$$

Следовательно, получаем

$$y' = C_1 y \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx.$$

и интегрируем

$$\ln|y| = C_1 x + \ln C_2.$$

В результате получаем общее решение данного примера

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x}.$$

Задания для практических занятий к теме 6.

$$1. \quad y''' + y'^5 = (y'' + y')y'' y'^2.$$

$$2. \quad 4y'' \sqrt{y} = 1.$$

$$3. \quad 3yy' y'' = y'^3 + 2.$$

$$4. \quad yy'' = 7y'^2 + y^4 y'.$$

$$5. \quad (y^3 + y)y'' - (3y^2 - 1)y'^2 = 0.$$

$$6. \quad yy'' = 2y' + 2y'^2.$$

$$7. \quad (1 + y^2)y'' = y(y'^2 - 2).$$

$$8. \quad 2(1 - y)y'' = y'^2 + 1).$$

Решить задачу Коши:

$$9. \quad y''(x^2 + 1) = 2xy' \quad y(0) = 1; y'(0) = 3$$

$$10. \quad xy'' - x^2 \cos x - y' = 0 \quad y(\pi) = \pi; y'(\pi) = 0$$

$$11. \quad y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x} \right) \quad y(1) = 1/2; y'(1) = 1$$

$$12. \quad y'' = 2x(y')^2 \quad y(2) = 3/2; y'(2) = -1/4$$

$$13. \quad 2y'' = 3y^2 \quad y(-2) = 1; y'(-2) = -1$$

$$14. \quad y'' = e^{2y} \quad y(0) = 0; y'(0) = -1$$

$$15. 2(y')^2 = y''(y-1) \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = -1$$

$$16. y''(e^x + 1)y' = 0 \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$$

Ответы:

$$1. e^y = (x + C_1) = C_2, (y + C_1)(C_2 - x) = 4, y = C,$$

$$2. 4(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 12C_1(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{1}{2}} = C_2 \pm 3x.$$

$$3. yC_1 = \left(\frac{2}{3}C_1x + C_2\right)^{\frac{3}{2}} + 2, y = C - x^3\sqrt{2}.$$

$$4. y^3 \left[1 + C_2 e^{C_1(x - \frac{1}{y^3})} \right] = C_1.$$

$$5. (1 + y^2)(C_1x + C_2) = 1.$$

$$6. y \left(1 - C_2 e^{\frac{2x}{C_1}} \right) = C_1 \left(1 + C_2 e^{\frac{2x}{C_1}} \right), \operatorname{arctg}(C_1y) + C_1x = C_2, y + x = C.$$

$$7. y + \sqrt{1 + y^2 + C_1^2} = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}, y = \sqrt{C_1^2 - 1} \sin \left(\frac{x}{C_1} + C_2 \right), y = \pm x + C.$$

$$8. 2x = C_1(2t + \sin 2t) + C_2, y = 1 - C_1 \cos^2 t.$$

$$9. y = x^3 + 3x + 1$$

$$10. y = -x \cos x + \sin x$$

$$11. y = x^2 / 2$$

$$12. y = 1/x + 1$$

$$13. y = \frac{4}{(x+4)^2}$$

$$14. y = -\ln|x-1|$$

$$15. y = \frac{x+1}{x}$$

$$16. y = x - e^{-x}$$

Варианты контрольных заданий к теме 6.

Варианты заданий

$$1. (y'')^2 - 5y' + 6 = 0.$$

2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$
3. $(y'')^2 + (y')^2 = (y')^4.$
4. $(y'')^2 + (y''')^2 = 1.$
5. $y''(1 + 2 \ln y') = 1.$
6. $x = (y'')^2 + 1.$
7. $4y' + (y'')^2 = 4xy''.$
8. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$
9. $xy''' + y'' - x - 1 = 0.$
10. $y'y''' - 3(y'')^2 = 0.$
11. $x^4y''' + 2x^3y'' = 1.$
12. $y''y^3 = 1.$
13. $yy'' - (y')^2 - 1 = 0.$
14. $1 + (y')^2 = 2yy''.$
15. $y^4 - y^3y'' = 1.$
16. $yy'' - (y')^2 = y^2y'.$
17. $yy'' = (y')^2.$
18. $y'' = [1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}.$
19. $y'' = e^y.$
20. $2(2 - y)y'' = 1 + (y')^2.$
21. $1 + (y')^2 = 2yy''.$
22. $2(y')^2 = (y - 1)y''.$
23. $yy'' + (y')^2 = 0.$
24. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0.$
25. $yy'' - (y')^2 = 2y^2.$
26. $y''' = (y'')^3.$
27. $4y' + (y'')^2 = 4xy''.$

$$28. y''' + (y'')^2 = 0.$$

$$29. \begin{cases} y^3 y'' + 1 = 0; y(1) = 1; \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} (y')^2 + 2y'' = 0; y(1) = 1; \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Тема 7.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

1. Основные понятия.

Рассматриваемый здесь класс уравнений является одним из наиболее важных для приложений и достаточно хорошо изучен.

Определение. Дифференциальное уравнением второго порядка называется линейным, если оно является уравнением первой степени относительно искомой функции и ее первой и второй производных.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка может быть приведено (при помощи алгебраических преобразований) к виду:

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x), \quad (1)$$

где $y = y(x)$ - неизвестная функция. Таким образом, уравнение (1) представляет собой общий вид дифференциального уравнения *второго порядка*.

Если $f(x) \neq 0$, то это уравнение называется *неоднородным*, если $f(x) \equiv 0$, то – *однородным*.

Следовательно, линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0. \quad (2)$$

2. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Теорема. Если $y = y_1(x)$ - решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (2), то функция $y = C y_1(x)$, где C - произвольная постоянная, также является его решением.

Доказательство. Нам дано:

$$y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 = 0.$$

Найдем производные функции $y = Cy_1(x)$:

$$y = Cy_1', \quad y'' = Cy_1''$$

и подставим в левую часть уравнения (2):

$$Cy_1'' + p(x) \cdot Cy_1' + g(x)Cy_1 = C(y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1) = 0, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Теорема. Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (2), то их сумма $y = y_1(x) + y_2(x)$ также будет его решением.

Доказательство. Нам дано

$$y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 = 0; \quad y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2 = 0.$$

Найдем производные функции $y = y_1(x) + y_2(x)$:

$$y' = y_1' + y_2'; \quad y'' = y_1'' + y_2'' \text{ и подставим их в левую часть уравнения (2):}$$

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2'' + p(x)(y_1' + y_2') + g(x)(y_1 + y_2) &= y_1'' + y_2'' + p(x)y_1' + p(x)y_2' + \\ g(x)y_1 + g(x)y_2 &= (y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1) + (y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два решения уравнения (2), то и функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

3. Линейная зависимость и независимость функций.

Определение. Функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале $(a;b)$, если их отношение

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z(x)$$

не является постоянной на этом интервале. Если же это отношение является постоянной, то функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ называются *линейно зависимыми*.

Пример. Функции $y_1(x) = x^3$ и $y_2(x) = x_2$ являются *линейно независимыми* на любом интервале:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x^3}{x^3} = x \neq \text{const.}$$

Пример. Функции $y_1(x) = 2x^3$ и $y_2(x) = x^2$ являются линейно зависимыми на любом интервале:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

Определение. Определителем Вронского для двух функций

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ называется определитель вида

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Отметим без доказательства следующее свойство определителя Вронского:

Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два линейно независимых на интервале $(a;b)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (2), то определитель Вронского для этих функций $W(y_1, y_2)$ отличен от нуля для всех x из этого интервала.

4. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Теорема. Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два линейно независимых на интервале $(a;b)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (2), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad \text{где } C_1 \text{ и } C_2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Замечание. Здесь под интервалом $(a;b)$ мы понимаем любой интервал на котором функции $p(x)$ и $q(x)$ из уравнения (2) непрерывны.

Доказательство. Тот факт, что функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых значениях постоянных является решением уравнения (2), вытекает из следствия п.2 настоящей темы.

Пусть заданы начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0; \quad y'|_{x=x_0} = y_0'. \quad (3)$$

Нам надо доказать, что найдутся такие значения произвольных постоянных,

при которых решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ будет удовлетворять начальным условиям (3). Итак

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \text{ и } y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x).$$

Подставляя в эти выражения для y и y' вместо x значение $x = x_0$ и учитывая начальные условия, получаем для нахождения значений произвольных постоянных C_1 и C_2 систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases} \quad (4)$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского в точке $x = x_0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \Big|_{x=x_0}.$$

Следовательно, по свойству определителя Вронского из п.3, он не равен нулю:

$$\Delta = W(y_1, y_2) \Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

Отсюда следует, что система (4) имеет единственное решение $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$ и функция

$$y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$$

удовлетворяет начальным условиям (3), и что требовалось доказать.

Пример. Найти общее решение уравнение

$$xy'' + 2y' + xy = 0,$$

$$\text{если } y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

есть его частное решение

Решение. Нам надо найти второе частное решение $y_2(x)$, линейно независимое с первым. Обозначим:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = z(x) \neq \text{const}$$

Тогда

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot z(x); \quad y_2'(x) = y_1'z + y_1 \cdot z' \quad y_2''(x) = y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z''$$

Подставляя в данное уравнение, получим

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)z + xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0$$

Но так как

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

есть частное решение данного уравнения, то

$$xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0, \text{ и поэтому имеем}$$

$$xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0. \quad (7)$$

$$\text{Но, } y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \text{ а значит}$$

$$xy_1' + y_1 = \cos x \text{ и уравнение (7) имеет вид}$$

$$z'' \sin x + 2z' \cos x = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{z''}{z'} + 2 \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

Вводя новую неизвестную функцию:

$$z' = p; \quad z'' = dp/dx$$

имеем

$$\frac{dp}{p \cdot dx} = -2 \cot x$$

$$\text{Отсюда } \frac{dp}{p} = -2 \cot x \cdot dx$$

Находим частное решение этого уравнения:

$$\ln p = -2 \ln \sin x \quad \text{т.е. } p = 1/\sin^2 x$$

Поэтому

$$z' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad z = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

Отсюда

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} (-\cot x) = -\frac{\cos x}{x}$$

Решения

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

линейно независимы, следовательно, по данной теореме, общее решение

данного уравнения имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}$$

Замечание. Так как

- c_2 является как и c_2 произвольной постоянной, что мы ее также обозначаем через c_2 .

5. Теорема об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

В этом пункте мы будем рассматривать линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \quad (1)$$

и соответствующие ему однородные уравнения

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0, \quad (2)$$

т.е. такие уравнения, левые части которых совпадают.

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (1) может быть представлено в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (2) и частного решения уравнения (1).*

Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два линейно независимых решения уравнения (2)

$$y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 = 0;$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2 = 0;$$

а $y = y^*(x)$ - частное решение уравнения (1):

$$(y_1^*(x))'' + p(x) \cdot (y^*(x))' + g(x) \cdot y^*(x) = f(x).$$

Тогда легко доказать, что общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*(x),$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - два линейно независимых на (a, b) решения уравнения (2), то общее решение неоднородного уравнения (1) может быть найдено при помощи квадратур **методом вариации постоянных**.

Суть метода в следующем. Пусть

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (5)$$

где $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ - линейно независимые на (a,b) решения уравнения (2), а c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Будем искать решение (1) в виде

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2, \quad (6)$$

где $c_1(x), c_2(x)$ - пока неопределенные функции. Для их определения составляем следующую систему

$$\begin{cases} y_1 c_1'(x) + y_2 c_2'(x) = 0 \\ y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Разрешая эту систему относительно $c_1'(x), c_2'(x)$ получим

$$c_1'(x) = -\frac{y_2}{w(y_1, y_2)} f(x), \quad c_2'(x) = \frac{y_1}{w(y_1, y_2)} f(x),$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{y_2}{w(y_1, y_2)} f(x) dx + \bar{c}_1 \\ c_2(x) &= \int \frac{y_1}{w(y_1, y_2)} f(x) dx + \bar{c}_2, \end{aligned}$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ - постоянные интегрирования. Подставляя найденные значения $c_1(x), c_2(x)$ в (5) получим общее решение уравнения (1).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}.$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (см. пример 1)

$$y_{o.o} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$$

и, следовательно, его фундаментальная система решений будет

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Будем искать общее решение данного уравнения методом вариации

произвольных постоянных:

$$y = C_1(x) \frac{\sin x}{x} + C_2(x) \frac{\cos x}{x}, \quad \text{где}$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ - пока неизвестные функции от x , подлежащие определению. Для их нахождения составим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) \frac{\sin x}{x} + C_2'(x) \frac{\cos x}{x} &= 0, \\ C_1'(x) \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + C_2'(x) \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим:

$$C_1'(x) = \cos x, \quad C_2'(x) = \sin x.$$

Интегрируя, получим

$$C_1(x) = \sin x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\cos x + \tilde{C}_2.$$

Подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для y , найдем общий интеграл данного уравнения

$$y = \tilde{C}_1 \frac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение будет $y'' + y = 0$. его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ и общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{o.o} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \quad (A)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции от x . Для их нахождения составим систему:

$$\left. \begin{aligned} \cos x \cdot C_1(x) + \sin x \cdot C_2(x) &= 0 \\ -\sin x \cdot C_1(x) + \cos x \cdot C_2(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned} \right\}.$$

Разрешаем эту систему относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\operatorname{tg} x; \quad C_2(x) = 1.$$

Откуда интегрированием находим:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \quad C_2(x) = x + C_2,$$

Подставляя выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (A), получим общий интеграл данного уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Здесь $\cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ есть частное решение исходного неоднородного уравнения.

Задания для практических занятий к теме 7.

Проинтегрировать следующие уравнения (y_1 y_2 - частные решения однородного уравнения).

1. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x.$

2. $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0; \quad y_1 = x.$

3. $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4, \quad y_1 = \frac{1}{x}.$

4. $(4x^2 - x)y'' + 2(2x - 1)y' - 4y = 12x^2 - 6x, \quad y_1 = \frac{1}{x}.$

5. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1, \quad y_1 = \sin e^x.$

6. $x(x - 1)y'' - (2x - 1)y' + 2y = x^2(2x - 3), \quad y_1 = x^2.$

Ответы.

1. $y = C_1 \ln x + C_2 x.$

2. $y = 1 + C_1 x + C_2 \sqrt{1 + 2x^2}.$

3. $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x} + x^1.$

4. $y = C_1(2x - 1) + \frac{C_2}{x} + x^2.$

5. $y = x + C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x.$

6. $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2(2x - 1).$

Тема 8.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Метод Эйлера.

Не существует метода, позволяющего находить общее решение любого линейного однородного дифференциального второго порядка. Однако такой метод существует для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Этот метод называется методом Эйлера.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py + qy = 0, \quad (1)$$

где p и q - постоянные.

Метод Эйлера заключается в поиске частного решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k -некоторое число. Находим

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

и подставляем выражения для y , y' и y'' в уравнение (1):

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

или

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$ при любых k и x , то для того, чтобы выполнялось последнее тождество, необходимо и достаточно, чтобы число k являлось решением уравнения

$$k^2 + pk + g = 0. \quad (2)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (1). Возможны три случая в зависимости от дискриминанта этого уравнения.

2. Дискриминант характеристического уравнения больше нуля.

В случае, когда дискриминант $D=p^2 - 4g$ характеристического уравнения (2) больше нуля, это уравнение имеет два корня k_1 и k_2 . Следовательно, решив это уравнение, мы находим два частных решения дифференциального уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения будут линейно независимыми, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const},$$

поскольку $k_1 \neq k_2$. Следовательно, согласно теореме об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (лекция 4, п.4), общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (3)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Решаем его:

$$D = 9 - 8 = 1, \quad k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 2.$$

Согласно формуле (3) находим общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

3. Дискриминант характеристического уравнения равен нулю.

Если дискриминант $D=p^2 - 4g$ характеристического уравнения (2) равен нулю, то

мы находим один корень этого уравнения

$$k_1 = -p/2$$

и получаем одно частное решение дифференциального уравнения (1)

$$y_1 = e^{k_1 x} = C_2 e^{-px/2}.$$

Найдем теперь второе частное решение этого уравнения $y = y_2(x)$, линейно независимое с первым. Обозначим:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{y_2(x)}{e^{-px/2}} = \varphi(x) \neq \text{const.}$$

Тогда

$$y_2(x) = e^{-px/2} \cdot \varphi(x)$$

$$y_2'(x) = -\frac{p}{2} \cdot e^{-px/2} \cdot \varphi(x) + e^{-px/2} \cdot \varphi'(x)$$

$$y_2''(x) = \frac{p^2}{4} \cdot e^{-px/2} \cdot \varphi(x) - \frac{p}{2} \cdot e^{-px/2} \cdot \varphi'(x) - \\ - \frac{p}{2} \cdot e^{-px/2} \cdot \varphi'(x) + e^{-px/2} \cdot \varphi''(x).$$

Подставим эти выражения $y_2(x)$, $y_2'(x)$ и $y_2''(x)$ в уравнение (1)

$$\frac{p^2}{4} e^{-px/2} \varphi(x) - p e^{-px/2} \varphi'(x) + e^{-px/2} \varphi''(x) + \\ + p \left(-\frac{p}{2} e^{-px/2} \varphi(x) + e^{-px/2} \varphi'(x) + g e^{-px/2} \cdot \varphi(x) \right) = 0$$

или

$$e^{-px/2} \varphi(x) \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + g \right) - p e^{-px/2} \varphi'(x) + p e^{-px/2} \varphi'(x) + \\ + e^{-px/2} \varphi''(x) = 0.$$

Так как

$$\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + g = \frac{-p^2 + 4g}{4} = \frac{p^2 - 4g}{4} = 0,$$

то равенство принимает вид

$$e^{-px/2} \varphi''(x) = 0 \text{ или } \varphi''(x) = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной

функции $\varphi(x)$. Решаем его:

$$\varphi(x) = C_1 \quad \varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Так как нам надо найти частное решение $y_2(x)$ дифференциального уравнения (1), то мы должны найти частное решение дифференциального уравнения относительно $\varphi(x)$.

Полагая $C_1 = 1, C_2 = 0$, получаем искомое решение

$$\varphi(x) = x$$

и, следовательно

$$y_2(x) = xe^{-px/2} \quad \text{или} \quad y_2(x) = xe^{-k_1 x}$$

Следовательно, согласно теореме об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{-k_1 x} + C_2 e^{-k_1 x}$$

или

$$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x), \quad (4)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Решаем его

$$D = 36 - 36 = 0, \quad k_1 = 0.$$

Согласно формуле (4) находим общее решение этого уравнения

$$y = e^{3x} (C_1 + C_2 x).$$

4. Комплексное число.

Прежде чем рассмотреть случай с отрицательным дискриминантом характеристического уравнения, мы расширим понятие числа, а именно введем комплексные числа.

Определения 1. Комплексным числом называется выражение вида $a+bi$, где a

a и b действительные числа, i - некоторый символ.

2. Два комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ считаются равными, если $a = c, b = d$.

3. Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(a + c) + (b + d)i$

4. Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Таким образом, действия над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами с заменой $i^2 = -1$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $a + bi$, а выражение bi - его мнимой частью, число b - коэффициентом мнимой части.

Число $a + 0 \cdot i$, будем обозначать через a и отождествлять с действительным числом a . Таким образом действительные числа составляют часть множества комплексных чисел.

Число $0 + bi$ будем обозначать через bi и называть число мнимым.

5. Два комплексных числа $a + bi$ и $a - bi$ называются сопряженными. Их сумма и произведение являются действительными числами:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

6. Вычитание комплексных чисел вводится как действие, обратное сложению:

$$(a + bi) - (c + di) = x + iy,$$

если

$$(a + bi) = (c + di) + (x + yi)$$

т.е.

$$a = c + x, \quad b = d + y,$$

откуда

$$x = a - c; \quad y = b - d.$$

Итак:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

7. Если обозначить $z = a + bi$, то символ e^z оказывается определенным для любого комплексного числа z , причем сохраняются привычные нам законы

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}; \quad e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}; \quad (e^z)^m = e^{mz} \quad (m - \text{целое}).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x) = e^{-xi} (\cos x + i \sin x).$$

Дифференцируя ее, находим

$$\varphi'(x) = -ie^{-xi} (\cos x + i \sin x) + e^{-xi} (-\sin x + i \cos x),$$

Откуда

$$\varphi'(x) = -e^{-xi} (i^2 + 1) \sin x$$

Но $i^2 = -1$. Значит $\varphi'(x) = 0$. А тогда $\varphi(x)$ есть постоянная, значение которой не зависит от x . С другой стороны, непосредственно видно, что $\varphi(0) = 1$. Таким образом при всех x будет

$$e^{-xi} (\cos x + i \sin x) = 1.$$

Умножая это равенство на e^{xi} , приходим к знаменитой **формуле Эйлера**

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Отсюда при $z = a + bi$ получим

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{bxi} = e^a (\cos bx + i \sin bx).$$

Заметим теперь, что квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет два сопряженных комплексных корня, которые находятся по обычной формуле для корней квадратного уравнения с учетом того, что

$$\pm \sqrt{D} = \pm \sqrt{|D|} \cdot i,$$

Где D -дискриминант уравнения, а $|D|$ - его абсолютная величина.

Пример. Решить уравнение:

$$x^2 - 6x + 25 = 0.$$

Решение. $D = 36 - 4 \cdot 25 = -64$, поэтому

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 8i}{2}.$$

□

Ответ: $x_1 = 3 - 4i$; $x_2 = 3 + 4i$.

5. Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля.

В случае, когда дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения (2) меньше нуля, это уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае мы получаем два частных решения дифференциального уравнения (1):

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ и } y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Эти решения будут линейно независимыми:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}.$$

Следовательно, согласно теореме об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \quad (5)$$

Пример 5.6. решить уравнение:

$$y'' - 3y' + 9/2 y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 3k + 9/2 = 0.$$

$$D = 9 - 4 \cdot 9/2 = -9 \text{ откуда } k_{1,2} = \frac{3 \pm 3i}{2}.$$

$$k_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \quad k_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, \quad a = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}.$$

Согласно формуле (5) находим общее решение этого уравнения

$$y = e^{3x/2} \left(C_1 \sin \frac{3x}{2} + C_2 \cos \frac{3x}{2} \right).$$

Задания для практических занятий к теме 8

Решить уравнения:

1. $y'' - 2y' = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $4y'' + 4y' + y = 0$
5. $y'' + 4y' + 3y = 0$
6. $2y'' - 5y' + 2y = 0$
7. $y'' + 2y' + 10y = 0$
8. $y'' + 4y' + 4y = 0$
9. $y'' + 6y' + 13y = 0$
10. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

11. $y'' - 2y' + y = 0$
12. $y'' - 4y' + 3y = 0$
13. $y'' + 4y' + 29y = 0$
14. $4y'' - 2y' + y = 0$
15. $y'' - 5y' + 6y = 0$
16. $y'' - 2y' + 3y = 0$
17. $y'' + 2ay' + a^2y = 0$
18. $y'' + 2y' + 2y = 0$
19. $y'' + 4y' + 5y = 0$
20. $y'' - 5y' + 4y = 0$

Ответы.

1. $y = C_1 + C_2 \cdot e^{2x}$
2. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
3. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
4. $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x)$

5. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$
6. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$
7. $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
8. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$
9. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
10. $y = e^x(C_1 \cos(x/2) + C_2 \sin(x/2))$
11. $y = (7 - 3x)e^{x-2}$
12. $y = 4e^x + 2e^{3x}$
13. $y = 3e^{-2x} \sin 5x$
14. $y = e^{-x/2}(2 + x)$
15. $y = e^{2x}$
16. $y = e^x(\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x))$
17. $y = e^{-ax}(a + a^2 x)$
18. $y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)$
19. $y = -3e^{-2x}(\cos x + \sin x)$
20. $y = 2e^{7x} + 3e^{-2x}$

Тема 9.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Постановка задачи.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка для решения такого уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение данного неоднородного уравнения. Первая из этих задач рассматривалась в предыдущей лекции, а второй будет посвящена данная лекция. Мы здесь займемся решением второй из этих задач одним из возможных методов, а именно методом подбора частного решения для некоторых видов правой части уравнения. И так, мы рассматриваем уравнение

$$y'' + py' + gy = f(x), \quad (1)$$

где p и g -константы.

2. Случай $f(x) = P_n(x)e^{ax}$.

Здесь под $P_n(x)$ мы понимаем многочлен степени n . Частное решение ищется в виде:

1) $y^*(x) = Q_n(x)e^{ax}$, если a не является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, причем $Q(x)$ -многочлен n -ой степени с буквенными коэффициентами:

$$Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx + D.$$

2) $y^*(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}$, если корни характеристического уравнения действительные и различные и один из них равен α .

3) $y^*(x) = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$, если корень характеристического уравнения равен α при дискриминанте, равен нулю.

Пример. Решить уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 7e^{2x}.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$k^2 - 5k + 6 = 0; \text{ откуда } k_1 = 2; \quad k_2 = 3.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$(k_2 \neq k_1 = \alpha = 2)$$

$$y^* = Ax e^{2x}.$$

Тогда

$$y^{*'} = Ax e^{2x} + 2Axe^{2x};$$

$$y^{*''} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставляем в уравнение

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = 7e^{2x}$$

или

$$-Ae^{2x} = 7e^{2x}.$$

Последнее равенство должно быть тождеством. Получаем

$$A = -7.$$

Значит

$$y^* = -7xe^{2x}.$$

Таким образом получаем общее решение данного уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 7xe^{2x}.$$

□

Пример. Решить уравнение:

$$y'' - 7y' + 12y = 12x^2 + 10x.$$

Решение. Решаем однородное уравнение

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0,$$

откуда

$$k_1 = 3 \quad \text{и} \quad k_2 = 4;$$

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

В нашем случае

$$f(x) = 12x^2 + 10x = (12x^2 + 10x)e^{0x},$$

значит $\alpha = 0$; $P_n(x) = P_2(x) = 10x$. Ищем решение в виде

$$y^* = Ax^2 + Bx + C.$$

Находим

$$y^* = 2Ax + B \quad \text{и} \quad y^{*''} = 2A$$

и подставляем в уравнение:

$$2A - 14Ax - 7B + 12Ax^2 + 12Bx + 12C = 12x^2 + 10x$$

или

$$12x^2 + (12B - 14A)x + 2A - 7B + 12C = 12x^2 + 10x.$$

Так как равенство тождественное, то коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 12B - 14A = 10 \\ 2A - 7B + 12C = 0 \end{cases}$$

Решаем систему

$$A = 1; \quad B = 2; \quad C = -1,$$

т.е. частное решение имеет вид:

$$y^* = x^2 + 2x + 1, \quad \text{а общее решение}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + x^2 + 2x + 1.$$

□

3. Случай $f(x) = e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$.

Заметим, что здесь M и N – числа.

Частное решение в этом случае ищется в виде

1) $y^* = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если корни характеристического уравнения $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$;

2) $y = x e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если корни характеристического уравнения равны $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Пример 6.3 Решить уравнение:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin 2x.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 3y' + 2y = 0;$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 2.$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$(\alpha = 0; \beta = 2; k_{1,2} \neq \pm 2i).$$

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Тогда

$$y^{*'} = 2A \sin 2x + 2B \cos 2x;$$

$$y^{*''} = 4 \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Подставляем в уравнение

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 6A \sin 2x - 6B \cos 2x + \\ + 2A \cos 2x + 2B \sin 2x = \sin 2x.$$

$$(-2A - 6B) \cos 2x + (6A - 2B) \sin 2x = \sin 2x;$$

Так как равенство тождественное, то приравниваем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

$$\begin{cases} -2A - 6B = 0 \\ 6A - 2B = 1 \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} A = 3B \\ -18B - 2B = 1 \end{cases}$$

$$B = -1/20 \text{ и } A = 3/20.$$

т.е. частное решение имеет вид:

$$y^* = \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x,$$

а общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x.$$

Задания для практических заданий к теме 9.

Решить уравнения:

1. $2y'' + y' - y = 2e^x$
2. $y'' + 2y' + 5y = (-17/2) \cos 2x$
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x$
4. $y'' + 4y' + 5y = 1$
5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$
6. $y'' - y' = 2e^x - x^2$
7. $y'' + y = 4xe^x$
8. $y'' + 4y' - 2y = 3xe^x$
9. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$
10. $y'' + y' = 4 \sin x$
11. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^x$
12. $y'' - 9y' = e^{3x} \cos x$
13. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$
14. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна 1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$;
3) $2\sin x$; 4) $e^x(3 - 4x)$.

16. $y'' + y' = f(x)$, если $f(x)$ равна 1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8\cos 3x$;
3) $\cos x$; 4) $\sin x - 2e^{-x}$.

Ответы.

1. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cdot e^{x/2} + e^x$

2. $y = C_1 e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - 1/2 \cdot \cos 2x - 2 \sin 2x$

3. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$

4. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 0,2$

5. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + (1/5) \cdot e^{4x}$

6. $C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2$

7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$

8. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (x^2/2 - x/3)e^x$

9. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 0,1 \sin x + 0,3 \cos x$

10. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$

11. $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$

12. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x} (6/37 \sin x - 1/37 \cos x)$

13. $y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^x$

14. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + (x/16 - 1/32)e^{2x}$

15. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$, где y^* , равно 1) $5/3e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$;
3) $3/5 \cos x + 1/5 \sin x$; 4) $e^x(2x^2 + x)$.

16. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y^*$, где y^* , равно 1) $2x^3 - 13x + 2$; 2) $\cos 3x$;
3) $1/2x \sin x$; 4) $-1/2x \cos x - e^{-x}$

Варианты контрольных заданий к теме 9.

Решить линейные неоднородные уравнения:

1. $y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}$

2. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$
3. $y'' - y' - 2y = -9xe^{-x}$
4. $y'' + y' - 6y = -18x^2 e^{-x}$
5. $y'' - y' = e^x \cos x$
6. $y'' - y' + \frac{1}{2}y = e^x \sin x$
7. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$
8. $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5\sin x$
9. $y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x$
10. $y'' + 2y' - 3y = 2\cos x - 8xe^{-3x}$
11. $y'' + 9y = 6xe^{-3x} - 3\cos 3x$
12. $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$
13. $y'' - 4y' + 4y = 32xe^{-2x}$
14. $y'' + y' = (5 - 2x)e^{-x} - 10\sin 2x$
15. $y'' - y' = (4x + 3)e^x - 2\cos x$
16. $y'' - 4y' = -8e^{2x} \cos 2x - 8x + 2$
17. $y'' - 4y' + 13y = -9\cos 2x - 8\sin 2x$
18. $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-2x}$
19. $y'' + y = -2\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
20. $y'' - y' - 2y = -18xe^{-x}, \quad y(1) = 5e^{-1}, \quad y'(0) = 3e^{-1}$
21. $9y'' + y = 6\sin \frac{x}{3}, \quad y(3\pi) = 0, \quad y'(3\pi) = 1$
22. $y'' + y = \cos(x-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$
23. $4y'' + y = 4\cos \frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$
24. $y'' + y = 2\sin(x+1), \quad y(0) = y'(0) = 0$
25. $y'' - 2y' + y = 2xe^x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -e$
26. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 5e$
27. $y'' + y = \sin(x-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$

$$28. y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$29. y'' + 2y' + y = \frac{1}{x}e^{-x}, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

$$30. y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^{-x}, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

Ответы к вопросам:

$$1. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

$$2. y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{x^4}{12} e^{-x}$$

$$3. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \left(x + \frac{3}{2} x^2 \right) e^{-x}$$

$$4. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + \left(x + \frac{3}{2} x^2 \right) e^{-x}$$

$$5. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{5} e^x (\cos x + 2 \sin x)$$

$$6. y = e^{\frac{\pi}{2}} \left(C_1 \sin \frac{x}{2} + C_2 \cos \frac{x}{2} \right) - \frac{2}{5} e^x (\sin x + 2 \cos x)$$

$$7. y = e^{2x} (C_1 + C_2 x + x^2) + \frac{1}{8} (2x^2 + 4x + 3)$$

$$8. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{9} (3x^2 + 2x) e^{-2x} - \frac{1}{2} (3 \sin x + \cos x)$$

$$9. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} (3x + 1) e^{-2x} - \frac{1}{4} x \cos 2x$$

$$10. y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} (3x^2 + x) e^{-3x} - \frac{1}{5} (2 \cos x - \sin x)$$

$$11. y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9} (3x + 1) e^{-3x} - \frac{1}{2} x \sin 3x$$

$$12. y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x} + \left(x - \frac{2}{3} \right) e^{3x}$$

$$13. y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (2x + 1) e^{-2x}$$

$$14. y = C_1 + C_2 e^{-x} + (x^2 - 3x) e^{-x} + \cos 2x + 2 \sin 2x$$

$$15. y = C_1 + C_2 e^x + x(2x - 1) e^x + \cos x + \sin x$$

16. $y = C_1 + C_2 e^{4x} + e^{2x} \cos 2x + x^2$
17. $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \cos 2x$
18. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x) + x^2 e^{-2x}$
19. $y = x \cos x$
20. $y = (3x^2 + 2x) e^{-x}$
21. $y = (3\pi - x) \cos \frac{x}{3}$
22. $y = \frac{1}{2} \sin 1 \sin x + \frac{1}{2} x \sin(x-1)$
23. $y = (x - 2\pi) \cos \frac{x}{2}$
24. $y = \cos 1 \sin x - x \cos(x+1)$
25. $y = e^x (x^2 - 3x + 2)$
26. $y = 8e^{2x-1} - (x^2 + 2x + 4) e^x$
27. $y = \frac{1}{2} \cos 1 \sin x - \frac{1}{2} x \cos(x-1)$
28. $y = (x+1) \sin x \cos x \ln |\cos x|$
29. $y = (1 - x - x \ln x) e^{-x}$
30. $y = (1 - x + x \ln x) e^x$

Тема 10.

Системы дифференциальных уравнений. Понятие о теории устойчивости Ляпунова.

П.1. Системы дифференциальных уравнений

Мы ограничимся рассмотрением систем двух дифференциальных уравнений. С подобными системами приходится встречаться часто в теоретической механике, сопротивлений материалов и других приложениях математики.

Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \psi(t, x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Где t - независимая переменная; $x(t)$, $y(t)$ - независимые функции, называется нормальной.

Пара функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ является решением системы (1) если каждое из уравнений системы они обращают в тождество.

Класс функций вида

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2), \\ y = y(t, C_1, C_2), \end{cases}$$

Называется общим решением системы (1), если при всех значениях произвольных постоянных C_1, C_2 , соответствующая пара функций $\{x, y\}$ является решением системы.

Для системы дифференциальных уравнений (1) можно сформулировать задачу Коши: найти решение

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удастся свести к одному уравнению второго порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Это может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одной (метод исключения).

Если первые части уравнений системы (1) являются линейными функциями, то система называется линейной.

Ограничимся рассмотрением линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = px + qy \end{cases} \quad (2)$$

где a, b, p, q - некоторые числа.

Переобозначим производные: $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = px + qy \end{cases} \quad (3)$$

Пусть для определенности $p \neq 0$.

Выразим x из второго уравнения системы (3)

$$x = \frac{1}{p}(y' - qy) \quad (4)$$

Дифференцируем второе уравнение системы (3) по переменной t :

$$y'' = px' + qy'$$

Затем подставляем в него x' из первого уравнения системы:

$$y'' = p(ax + by) + qy'$$

В полученное равенство вместо x подставим выражение (4)

$$y'' = ay' - aqy + pby + qy'$$

или

$$y'' - (a + q)y' + (aq + pb)y = 0 \quad (5)$$

Соотношение (5) – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

В соответствии с корнями λ_1, λ_2 найдем фундаментальную систему решений y_1 и y_2 , а затем и общее решение уравнения (5).

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

Затем из равенства (4) находим функцию $x(t, C_1, C_2)$. В результате будет получено общее решение системы (3).

П.2. Понятие о теории устойчивости Ляпунова.

Так как решения большинства дифференциальных уравнений и систем уравнений не выражаются через элементарные функции или квадратуру, то в этих случаях при решении конкретных дифференциальных уравнений применяются приближенные методы интегрирования.

Недостаток этих методов заключается в том, что они дают только одно частное решение; чтобы получить другие частные решения, нужно все вычисления проводить снова. Зная одно частное решение, нельзя сделать заключение о характере других решений.

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента, и, в частности, при

неограниченном возрастании аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции, и т.д. Этими вопросами занимается *качественная теория дифференциальных уравнений*.

Одним из основных вопросов качественной теории является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения; этот вопрос был подробно исследован знаменитым русским математиком А.М. Ляпуновым (1857-1918).

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \quad (1)$$

Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ - решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$x|_{t=0} = x_0 \quad y|_{t=0} = y_0 \quad (1')$$

Пусть далее, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ и $\bar{y} = \bar{y}(t)$ - решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{x}|_{t=0} = \bar{x}_0 \quad \bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0 \quad (1'')$$

Определение. Решение $x = x(t)$ и $y = y(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1) и начальным условиям (1'), называется устойчивыми по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всех значениях $t > 0$ будут выполняться неравенства

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \quad |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

если начальные данные удовлетворяют неравенствам

$$|\bar{x}_0 - x_0| < \delta \quad |\bar{y}_0 - y_0| < \delta \quad (3)$$

Выясним смысл этого определения. Из неравенства (2) и (3) следует, что при малых изменениях начальных условий мало отличаются соответствующие решения при всех положительных значениях t . Если система дифференциальных уравнений является системой, описывающей некоторое

движение, то в случае устойчивости решения характер движения мало изменяется при малом изменении начальных данных.

Разберем это на примере одного уравнения первого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \quad (a)$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y = Ce^{-t} + 1. \quad (б)$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{t=0} = 1. \quad (в)$$

Очевидно, что это решение $y = 1$ получится при $C = 0$. Найдем, далее, частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0.$$

Найдем значение C из уравнения (б):

$$\bar{y}_0 = C + 1$$

откуда

$$C = \bar{y}_0 - 1$$

Подставляя это значение C в равенство (б), получаем

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

Очевидно, решение $y = 1$ является устойчивым. Действительно,

$$\bar{y} - y = [(\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$.

Следовательно, при произвольном ε будет выполняться неравенство (3), если будет выполняться неравенство

$$(\bar{y}_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

Задания для практических занятий к теме 10.

Найти решения следующих однородных систем дифференциальных Уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{10t} + C_2 e^t \\ y = C_1 e^{10t} - 2C_2 e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = C_2 e^{2t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = e^{4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y = e^{4t} (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y, \quad x(0) = 2, y(0) = 2 \end{cases}$$

Ответ:

$$x = y = 2e^{4t}$$

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y, \quad x(0) = 1, y(0) = 3 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = 3e^{5t} \end{cases}$$

ТЕСТЫ.

Тест 1.

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений:

Варианты ответов:

1. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

уравнение с разделяющимися переменными;

2. $y' + y - xy^2 = 0$

однородное уравнение первого порядка;

3. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$

линейное уравнение первого порядка;
уравнение Бернулли

4. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x$

Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения.

Варианты ответов:

последовательное интегрирование
обеих частей уравнения;

1. $2x^2 y'' - (y')^2 = 0$

2. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

3. $3yy' - 7y'' = 0$

подстановка $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$

подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$

Задание 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения

$$ydy = \frac{dx}{2(x+1)}$$

Варианты ответов:

☐ $y = e^x$

☐ $y = 2$

☐ $y = \frac{1}{x+1}$

☐ $y = \sqrt{\ln(x+1)}$

Задание 4. Решениями уравнения

$$y'' = 2(x+1) + e^x$$

являются функции.....

Варианты ответов: (укажите два ответа)

☐ $y = \frac{(x+1)^3}{3} e^x + C_1 x + C_2$

☐ $y = (x+1)^3 + e^x + C_1 x + C_2$

☐ $y = x^3 + x^2 + e^x + C_1 x + C_2$

☐ $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + e + C_1 x + C_2$

Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является ...

Варианты ответов:

☐ $xyy' = 1 - x^2$

☐ $ydx + ctgx dy = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

☐ $y' = 3y - 1$

☐ $(y'')^2 + (y')^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

Задание 6. Функция $y = C(x+1)$

является решением уравнения

$y' + 2 = 0$, если C принимает

значение ...

Укажите ответ

Задание 7. Решите задачу Коши

Укажите ответ

$$\begin{cases} xy' - 6y = x \\ y(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

и в ответе укажите значение $y(0)$.

Задание 8. Решите

Запишите полное решение

дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Задание 9. Решите дифференциальное

Запишите полное решение

уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$

Задание 10. Решите

Запишите полное решение

дифференциальное уравнение

$$y'' + 2xy' = 1 + y^2$$

Тест 2

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений:

Варианты ответов:

1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$

уравнение с разделяющимися переменными;

2. $y' + \frac{y}{x} = x^2$

однородное уравнение первого порядка;

3. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$

линейное уравнение первого порядка;

4. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

уравнение Бернулли.

Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения.

Варианты ответов:

1. $y'' = xe^{-x}$

Последовательное интегрирование обеих частей уравнения;

2. $(y')^3 = yy'' = (y')^2$

подстановка $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$

3. $y' + (x+1)y'' = 0$

подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$

Задание 3. Укажите функции, являющиеся решениями уравнения

$$xy^2 = y'$$

Варианты ответов: (укажите два ответа)

☐ $y = 4 - \frac{2}{x^2}$

☐ $y = \frac{x^2}{2}$

☐ $y = -\frac{2}{x^2}$

☐ $y = \frac{2}{x^2}$

Задание 4. Общим решением уравнения второго порядка $y'' = x^2 + x$ является функция ...

Варианты ответов:

☐ $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C$

☐ $y = x^4 + x^3 + C_1x + C_2$

☐ $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$

☐ $y = \frac{1}{6} + x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$

Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является ...

Варианты ответов:

☐ $y'x + y + xy^2 = 0$

☐ $y'' = e^{-2x}, \quad y(0) = 1, y(2) = e^{-4}$

☐ $yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$

☐ $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$

Задание 6. Укажите, при каком значении C функция $y = x^3$ является решением уравнения $y' = Cx^2$

Укажите ответ

Задание 7. Решите задачу Коши

Укажите ответ

$$\begin{cases} y' = 2e^{-2y} \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

и в ответе укажите значение $y\left(\frac{e}{4}\right)$

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение Запишите полное решение

$$\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение Запишите полное решение

$$\cos xy' + \sin xy = 1$$

Задание 10. Решите дифференциальное уравнение Запишите полное решение

дифференциальное уравнение

$$y^2 y'' + 1 = 0$$

Тест 3

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений:

1. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$

2. $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$

3. $xy' - y = x^2 \cos x$

4. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

Задание 2. Сопоставьте уравнение второго порядка и способы их решения

1. $y''x - y' = \cos \frac{y''}{x}$

2. $yy'' - y^2 = (y')^2$

3. $y'' \sin^4 x = \sin 2x$

Задание 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения $y' = -\operatorname{tg} x$

Варианты ответов:

уравнение с разделяющимися переменными;

однородное уравнение первого порядка;

линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли.

Варианты ответов:

Последовательное интегрирование обеих частей уравнения;

Подстановка $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$

Постановка

Варианты ответов:

☐ $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$

☐ $y = \ln(\cos x)$

☐ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

☐ $y = \ln(\sin x)$

Задание 4. Решениями уравнения

$y'' = x^2 + 4x + 4$ являются функции ...

Варианты ответов:

☐ $y = \frac{1}{12}(x-2)^4 + C$

☐ $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2$

☐ $y = (x+2)^4 + C_1x + C_2$

☐ $y = \frac{1}{12}(x+2)^4 + C_1x + C_2$

Задание 5. Среди перечисленных

задач «задачей Коши» является ...

Варианты ответов:

☐ $y'' = \frac{e^y}{2}$

☐ $(y+1)dx + (x^2 - 2)dy = 0$

☐ $y' + (x+5)y = xy^2, \quad y(0) = 2$

☐ $2yy'' = 4 + (y')^2$

Укажите ответ

Задание 6. Укажите, при каком

значении C функция $y = e^{2x+3}$ является

решением уравнения $y' - 2y + C = 2$

Задание 7. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} xy' - y = -2xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Укажите ответ

и в ответе укажите значение $y(2)$.

Задача 8. Решите дифференциальное

уравнение $y^2 y' = y(x - y)$.

Запишите полное решение

Задача 9. Решите дифференциальное

уравнение $y' = xy + x^3 y^2$.

Запишите полное решение

Задача 10. Решите дифференциальное

уравнение $(1 - x^2)y'' + xy' = 0$.

Запишите полное решение

Тест 4

Задача 1. Определите тип каждого из

Варианты ответов:

данных уравнений:

1. $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$

2. $y' + xy + (2-x)e^x y^2 = 0$

3. $(1+x^2)dy + ydx = 0$

4. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$

Задача 2. Сопоставьте уравнение второго порядка и способы их решения

1. $y'' \operatorname{ctg} 3x + y' = 0$

2. $y'' \cos^2 x + e^{3x} + 8x^2$

3. $(y')^2 = (2y + 3y')y''$

Задача 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения $dy - 3x^2 y dx = 0$

Задача 4. Общим решением уравнения второго порядка $y'' = \cos 3x + e^{2x}$ является функция ...

Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является ...

уравнение с разделяющимися переменными;
однородное уравнение первого порядка;
линейное уравнение первого порядка;
уравнение Бернулли.

Варианты ответов:

Последовательное интегрирование обеих частей уравнения;

Подстановка $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$

Постановка $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$

Варианты ответов: (укажите два ответа)

☐ $y = e^{x^3}$

☐ $y = e^x + 2$

☐ $y = e^{x^3-1}$

☐ $y = 2e^{x^2}$

Варианты ответов:

☐ $y = \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2$

☐ $y = \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{2} e^{2x} C$

☐ $y = \cos 3x + 2e^{2x} + C_1 x + C_2$

☐ $y = -\frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2$

Варианты ответов:

☐ $y'' \sin^2 x = 2y$

☐ $2(x+y)dx + (3x+3y-1)dy = 0, y(0) = 2$

$$\circ y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y(1) = 1, y(3) = 3$$

$$\circ ydx - xdy + \ln x dx = 0$$

Укажите ответ

Задание 6. Укажите, при каком значении C функция $y = C \sin x$ является решением уравнения $y'' + y' = \cos x - \sin x$

Задача 7. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} y'(x+5)^2 = 4y^2 \\ y(-4) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Укажите ответ

и в ответе укажите значение $y(-3)$

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$. Запишите полное решение

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $xy' - y = x \cdot \cos x$. Запишите полное решение

$$xy' - y = x \cdot \cos x.$$

Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$. Запишите полное решение

дифференциальное уравнение

$$y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0.$$

Тест 5

Задание 1. Укажите уравнения, решения которых можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных.

Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)

$$\circ y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$$

$$\circ y'' - 9y + 20y = x^2 \cos x$$

$$\circ 2y'' - y + 1 = 0$$

$$\circ y'' + y = 0$$

Задача 2. Фундаментальная система решений уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$

Варианты ответов:

$$\circ y_1 = \cos 4x, \quad y_2 = \sin 4x$$

имеет вид ...

☐ $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}$

☐ $y_1 = e^{-2x} \cos 4x, y_2 = e^{-2x} \sin 4x$

☐ $y_1 = e^{-2x}, y_2 = 1$

Задание 3. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Корнями его характеристического уравнения являются ...

Укажите ответы:

$\lambda_1 =$;

$\lambda_2 =$;

$\lambda_3 =$.

Задание 4. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' = 5x$$

Варианты ответов:

☐ $y = (Ax + B)x$

☐ $y = (Ax + B)e^{-\frac{2}{3}x}$

☐ $y = Ax + B$

☐ $y = Ax$

Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения:

1. линейное уравнение первого порядка;

2. линейное однородное уравнение первого порядка;

3. линейное неоднородное уравнение первого порядка;

4. линейное неоднородное уравнение третьего порядка

Варианты ответов:

☐ $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 2e^{3x}$

☐ $y = (C_1 + C_2 x)e^x$

☐ $y = x + C_1 e^{-x}$

☐ $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + x^2$

Задание 6. Функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - Cy' + 2y = 0$, если C принимает значение ...

Укажите ответ

Задание 7. По методу вариации произвольных постоянных частное

Варианты ответов:

решение однородного уравнения

$y'' - y' - 6y = xe^x$ следует искать в

виде ...

○ $y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)e^{-3x}$

○ $y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)e^{-2x}$

○ $y = e^{-2x}[C_1(x) + xC_2(x)]$

○ $y = e^{3x}[C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x]$

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение

$y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Запишите полное решение

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - y = e^{2x}$.

Запишите полное решение

Задание 10. 7. Решите систему дифференциальных уравнений

Запишите полное решение

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 5x + 6y \end{cases}$$

Тест 6.

Задание 1. Укажите неоднородное дифференциальные уравнения, первые части которых имеют «специальный вид»

Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)

○ $y'' - 4y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

○ $y'' - 2y' + 2y = 2$

○ $y'' + 3y' = 0$

○ $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$

Задание 2. Общее решение уравнения

$y'' + 9y = 0$ имеет вид ...

Варианты ответов:

○ $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

○ $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

○ $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

○ $y = C_1 e^{-9x} + C_2 x e^{-9x}$

Задание 3. Фундаментальная система

Варианты ответов:

решений уравнения третьего порядка

$y''' - 4y' = 0$ имеет вид ...

☐ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

☐ $y = C_1 + C_2 x + C_3 x e^{2x}$

☐ $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

☐ $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

Задание 4. Укажите вид частного
решение неоднородного

дифференциального уравнения

$9y'' + 6y' = 5x$

Варианты ответов:

☐ $y = (Ax + B)x$

☐ $y = (Ax + B)e^x$

☐ $y = Ax + B$

☐ $y = Ax$

Задание 5. Сопоставьте типы
уравнений и их возможные решения:

1. линейное уравнение первого
порядка;

2. линейное однородное уравнение
второго порядка;

3. линейное неоднородное уравнение
второго порядка;

4. линейное уравнение третьего
порядка

Варианты ответов:

☐ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

☐ $y = (e^x + C_1)x$

☐ $y = C_1 e^{7x} + C_2 x e^{7x} + 2 \cos 7x$

☐ $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

Задание 6. Функция $y = \sin Cx$

является решением

дифференциального уравнения

$y'' + 2Cy = 0$, если C принимает

значение ...

Укажите ответ

Задание 7. По методу вариации
произвольных постоянных частное
решение неоднородного уравнения

$5y'' + y' - 4y = \frac{e^x}{x^2}$ следует искать в

Варианты ответов:

☐ $y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$

☐ $y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$

☐ $y = e^{\frac{4}{5}x} [C_1(x) + C_2(x)x]$

виде ...

$$\circ y = C_1(x)e^{\frac{4}{5}x} + C_2(x)e^{-2x}$$

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 9$.

Запишите полное решение

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $2y'' - y' = x + 1$.

Запишите полное решение

Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений

Запишите полное решение

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$$

Тест 7

Задание 1. Укажите уравнения, решения которых можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных.

Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)

$$\circ y'' + \frac{1}{4}y = \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{-1}$$

$$\circ 2y'' - y' = 0$$

$$\circ y'' + 4y = \operatorname{ctgx}$$

$$\circ 5y'' + 2y' = e^x$$

Задание 2. Фундаментальная система решений уравнения третьего порядка $y''' - 4y' + 8y = 0$ имеет вид ...

Варианты ответов:

$$\circ y_1 = e^{2x} \sin x, \quad y_2 = e^{2x} \cos x$$

$$\circ y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^x$$

$$\circ y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = 1$$

$$\circ y_1 = e^{2x} \sin 2x, \quad y_2 = e^{2x} \cos 2x$$

Задание 3. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $9y''' - y' = 0$

Укажите ответы:

$$\lambda_1 = ;$$

$$\lambda_2 = ;$$

$$\lambda_3 = .$$

Корнями его характеристического уравнения являются ...

Задание 4. Укажите вид частного

Варианты ответов:

решение неоднородного
дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$$

○ $y = Ae^{2x}$

○ $y = (Ax + B)e^{2x}$

○ $y = Axe^{2x}$

○ $y = Ax$

Задание 5. Сопоставьте типы
уравнений и их возможные решения:

1. линейное уравнение первого
порядка;

2. линейное однородное уравнение
второго порядка;

3. линейное неоднородное уравнение
второго порядка;

4. линейное уравнение третьего
порядка

Варианты ответов:

○ $y = (\sin x + C_1)x^2$

○ $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

○ $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 12$

○ $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{x}{2}}$

Задание 6. Функция $y = e^{Cx}$ является
решением дифференциального
уравнения $y'' - Cy = 0$, если C
принимает значение ...

Укажите ответ

Задание 7. По методу вариации
произвольных постоянных частное
решение неоднородного уравнения
 $y'' + 25y = \operatorname{tg} 5x$ следует искать в
виде ...

Варианты ответов:

○ $y = C_1(x) \cos 5x + C_2(x) \sin 5x$

○ $y = C_1(x)e^{5x} + C_2(x)e^{-5x}$

○ $y = e^{-5x} [C_1(x) + C_2(x)]$

○ $y = e^x [C_1(x) \cos 5x + C_2(x) \sin 5x]$

Задание 8. Решите дифференциальное
уравнение

Запишите полное решение

$$y'' - 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Задание 9. Решите дифференциальное
уравнение $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$.

Запишите полное решение

Задание 10. Решите систему

Запишите полное решение

дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Тест 8

Задание 1. Укажите неоднородные дифференциальные уравнения, первые части которых имеют «специальный вид».

Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)

- ☐ $y'' + 6y' + 10y = 80e^x$
- ☐ $y'' - y = x \cos^2 x$
- ☐ $y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3$
- ☐ $y'' - 9y' + 20y = 0$

Задание 2. Общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$ имеет вид ...

Варианты ответов:

- ☐ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- ☐ $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
- ☐ $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$
- ☐ $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x}$

Задание 3. Фундаментальная система решений уравнения третьего порядка $y''' + 4y'' = 0$ имеет вид ...

Варианты ответов:

- ☐ $y = C_1 + C_2 e^{-7x}$
- ☐ $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-7x}$
- ☐ $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x + C_3$
- ☐ $y = C_1 + C_2 e^{7x} + C_3 e^{-7x}$

Задание 4. Укажите вид частного решение неоднородного дифференциального уравнения $5y'' + y' = \sin x$

Варианты ответов:

- ☐ $y = Ax \cos x$
- ☐ $y = A \sin x e^x$
- ☐ $y = (Ax + B) \sin x$
- ☐ $y = A \cos x + B \sin x$

Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения:

Варианты ответов:

- ☐ $y = e^{-2x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-x}$

1. линейное уравнение первого
порядка;

$$\circ y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. линейное однородное уравнение
второго порядка;

$$\circ y = x \ln x + C_1 x$$

$$\circ y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

3. линейное неоднородное уравнение
второго порядка;

4. линейное уравнение третьего
порядка

Задание 6. Функция $y = xe^x$ является
решением дифференциального
уравнения $y'' - 2y' + Cy = 0$, если C
принимает значение ...

Укажите ответ

Задание 7. По методу вариации
произвольных постоянных частное
решение неоднородного уравнения
 $4y'' + 4y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ следует искать в
виде ...

Варианты ответов:

$$\circ y = C_1(x)e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\circ y = e^{\frac{1}{2}x} [C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x]$$

$$\circ y = C_1(x)e^{-\frac{1}{2}x} + xC_2(x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\circ y = e^{2x} [C_1(x) + xC_2(x)]$$

Задание 8. Решите дифференциальное
уравнение

Запишите полное решение

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$$

Задание 9. Решите дифференциальное
уравнение $y'' - 4y' + 3y = 3x$.

Запишите полное решение

Задание 10. Решите систему
дифференциальных уравнений

Запишите полное решение

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - 3y \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1. Общие понятия и определения (о.д.у.; порядок о.д.у.; решения о.д.у.- общее; частное; особое; задача Коши; примеры). Примеры.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные уравнения. Примеры.
4. Уравнения первого порядка сводящиеся к однородным. Пример.
5. Линейные уравнения $1^{\text{го}}$ порядка. Метод решения. Пример.
6. Уравнение Бернулли. Метод решения. Пример.
7. Теорема существования и единственности решения задачи Коши, для о.д.у. $1^{\text{го}}$ порядка (геометрическая картина области D ; существование числа $M > 0$; метод Пикара –его суть и формула последовательных приближений).
Пример.
8. Уравнение в полных дифференциалах (функция 2^x переменных; частная производная; полный дифференциал – условия существования). Пример.
9. Уравнения в полных дифференциалах (нахождение $u(x, y)$; смысл $u(x, y) = c$).
Пример.
10. Уравнения $1^{\text{го}}$ порядка не разрешенные относительно производной.
Пример.
11. Неполные уравнения $1^{\text{го}}$ порядка (уравнения, содержащие только производную; не содержащие искомой функции). Пример.
12. Неполные уравнения $1^{\text{го}}$ порядка не содержащие независимой переменной.
Пример.
13. Общий метод введения параметра для о.д.у. $1^{\text{го}}$ порядка. Пример.
14. Метод введения параметра для о. д.у. $1^{\text{го}}$ порядка, если уравнение разрешимо относительно искомой функции. Пример.
15. Уравнение Лагранжа. Пример.

16. Уравнение Клеро. Пример.
17. Уравнения $2^{\text{го}}$ порядка (определение; задача Коши; решения – общее, частное). Решение уравнения $y'' = t(x)$. Пример.
18. Решение уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$. Пример.
19. Решение уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$. Пример.
20. Линейные дифференциальные уравнение $2^{\text{го}}$ порядка (определение; однородное и неоднородное; теоремы о свойствах решений).
21. Линейная зависимость и независимость двух функций (определение, примеры; определитель) Примеры.
22. Формула общего деления л.о. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка (теорема). Пример.
23. Общее решения л.о. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка (Теорема; метод вариации постоянных).
Пример.
24. Л.о. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами (метод Эйлера).
Случай $D > 0$. Пример.
25. Л.о. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами (метод Эйлера).
Случай $D = 0$. Пример.
26. Комплексные числа (определение; сумма, разность и произведение; равенство; примеры). Формула Эйлера.
27. Л.о. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами (метод Эйлера).
Случай $D < 0$. Пример.
28. Л.н. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами (постановка задачи).
Случай $f(k) = P_n(x) \cdot \ell^{dx}$ (при α являющимся однократными и двукратным корнем характеристического уравнения; при α не являющимся $\Rightarrow$)
29. Л.н. д.у. $2^{\text{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами (постановка задачи).
Случай

$$f(x) = \ell^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x); K_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i; K_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i.$$
30. Системы дифференциальных уравнений (нормальность; решение; задача Коши). Метод решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Пример.

31. Теория устойчивости движения. Пример.

Рекомендуется литература.

- 1). Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1958 (или любое другое издание).
- 2). Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1949 (или любое другое издание).
- 3). Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1964.
- 4). Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.
- 5). Филипов Л.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2009 (или любое другое издание).
- 6). Кисилев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
- 7). Матвеев Н.М. сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, 1965.

Приложения

(ЕГЭ, с.4+5)

Формулы сокращенного умножения

Для любых a, b и c верны равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ или}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b);$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ или}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Корни x_1 и x_2 находятся по формуле:

$$D = b^2 - 4ac; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

либо, если b – четное число (т.е. $b = 2k$):

$$D_1 = k^2 - ac; \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

$$D = b^2 - 4ac; \quad x^{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

либо, если b – нечетное число (т.е. $b = 2k + 1$):

$$D = b^2 - 4ac; \quad x^{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Корни x_1 и x_2 находятся по формуле:

Определение. Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить N .

Для обозначения логарифма употребляется знак $\log$. Тот факт, что число x является логарифмом числа N по основанию a , записывается так:

$$\log N = x.$$

По определению:

$$N = a^{\log_a N}.$$

Например, $\log_2 8 = 3$, $\text{т.к. } 2^3 = 8$; $\log \frac{1}{2} = -3$, $\text{т.к. } 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Если основание $a = 10$, то логарифм называется *десятичным* и записывается так

$$\lg N = x,$$

откуда

$$N = 10^x.$$

Если же за основание a взять число e (определяется через 2-ой замечательный предел: $e = 2,7182\dots$), то логарифм называется *натуральным* и записывается так

$$\ln N = x,$$

откуда

$$N = e^x.$$

Свойства логарифмов:

(ЕГЭ, с.2.3).

(ЕГЭ, с59-60).

Формулы дифференцирования

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x)' = 0$$

$$3. (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$4. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$5. (\sin x)' = \cos x$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$9. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$10. (\ell^x)' = \ell^x$$

$$11. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$12. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Правила дифференцирования

$$\text{I. } (u' + v') = u' + v'$$

$$\text{II. } (u' - v') = u' - v'$$

$$\text{III. } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{V. } (uv\omega)' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'$$

$$\text{VI. } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{VII. } y'_x = y'_z \cdot z'_x$$

$$\text{IV. } (cu)' = cu'$$

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C.$	7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
5. $\int \ell^x dx = \frac{\ell^x}{\ln \ell} + C.$	11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$	12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + m} \right) + C.$	

$$\int (u(x) \pm v(x)) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx.$$

$$\int C \cdot u(x) dx = C \int u(x) dx,$$

$$\int u(x) dx = \int u(x) d(x + \alpha),$$

$$\int u(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int u(x) d(\alpha \cdot x),$$

Т.К.

$$dx = \frac{1}{\alpha} d(\alpha x).$$

$$\int u dv = uv - \int v du -$$

формула интегрирования по частям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМА 1. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.....3

Тема 2. Однородные уравнения и уравнения сводящиеся к ним.....

Тема 3. Линейные уравнения 1-го порядка.

Уравнения Бернулли.....

Тема 4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения в полных дифференциалах.....

- Тема 5.** Уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной. Неполные уравнения. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро.....
- Тема 6.** Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия. Уравнения допускающие понижение прядка.....
- Тема 7.** Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.....
- Тема 8.** Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.....
- Тема 9.** Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.....
- Тема 10.** Системы дифференциальных уравнений. Понятие о теории устойчивости Ляпунова.....
- Дополнение.** Тесты. Вопросы для самопроверки.....
- Приложения.** Таблицы производных и интегралов. Основные формулы элементарной математики.....